07-02 Activité

1. a] Déterminer une fonction f telle que pour tout x on a $f'(x) = 8\,f(x)$.

b] Déterminer une fonction $g \neq f$ telle que pour tout x on a $g'(x) = 8\,g(x)$.

c] Déterminer toutes les fonctions solutions de l'équation $f'(x) = 8\,f(x)$.

d] Déterminer une fonction h telle que pour tout x on a $h'(x) = 8\,h(x)$ avec $h(0) = 3$.

2. a] Déterminer une fonction f telle que pour tout x on a $f'(x) = 8\,f(x) + 2$.

b] Déterminer une fonction $g \neq f$ telle que pour tout x on a $g'(x) = 8\,g(x) + 2$.

c] Déterminer toutes les fonctions solutions de l'équation $f'(x) = 8\,f(x) + 2$.

d] Déterminer une fonction h telle que pour tout x on a $h'(x) = 8\,h(x) + 2$ avec $h(0) = 3$.

07-02 Les équations différentielles

Définitions

Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une fonction.
Résoudre une équation différentielle, c'est trouver toutes les fonctions qui vérifient l'équation.

Exemple

Soit l'équation différentielle telle que pour tout x on a $1 + f'(x) = 2x$

Les solutions de cette équation sont les fonctions $f : x \mapsto x^2 - x + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Remarque

On note parfois y l'inconnue d'une équation différentielle. L'équation $1 + f'(x) = 2x$ s'écrit alors $1 + y' = 2x$.

Théorèmes

Soient a et b deux nombres réels non nuls.

L'équation $y' = ay$ admet pour solutions les fonctions $x \mapsto K\,e^{ax}$ avec K un réel quelconque.

L'équation $y' = ay + b$ admet pour solutions les fonctions $x \mapsto K\,e^{ax} - \dfrac{b}{a}$ avec K un réel quelconque.

Exemple

L'équation $3y' - 2y = 3$ admet pour solutions les fonctions $x \mapsto K\,e^{\frac{2}{3}x} - \dfrac{3}{2}$ avec K un réel quelconque.

Remarques

- Une solution particulière de l'équation $y' = ay + b$ est la fonction constante $x \mapsto -\dfrac{b}{a}$.

  Les solutions de $y' = ay + b$ sont la somme des solutions de $y' = ay$ et de cette solution particulière.

- Il existe une infinité de solutions de l'équation $y' = ay + b$ mais une seule d'entre elles vérifie la condition initiale $y(x_0) = k$ où x_0 et k sont deux réels donnés.

Exemple

L'unique solution de l'équation $3y' - 2y = 3$ vérifiant $y(1) = 2$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{7}{2}e^{\frac{2}{3}(x-1)} - \dfrac{3}{2}$

07-02 Les équations différentielles

Définitions

Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une fonction.
Résoudre une équation différentielle, c'est trouver toutes les fonctions qui vérifient l'équation.

Exemple

Soit l'équation différentielle telle que pour tout x on a $1 + f'(x) = 2x$

Les solutions de cette équation sont les fonctions $f : x \mapsto$ .... avec $C \in \mathbb{R}$.

Remarque

On note parfois y l'inconnue d'une équation différentielle. L'équation $1 + f'(x) = 2x$ s'écrit alors ....

Théorèmes

Soient a et b deux nombres réels non nuls.

L'équation $y' = ay$ admet pour solutions les fonctions $x \mapsto K\,e^{ax}$ avec K un réel quelconque.

L'équation $y' = ay + b$ admet pour solutions les fonctions $x \mapsto K\,e^{ax} - \dfrac{b}{a}$ avec K un réel quelconque.

Exemple

L'équation $3y' - 2y = 3$ admet pour solutions les fonctions $x \mapsto$ .... avec K un réel quelconque.

Remarques

- Une solution particulière de l'équation $y' = ay + b$ est la fonction constante $x \mapsto$ ....

  Les solutions de $y' = ay + b$ sont la somme des solutions de .... et de cette solution particulière.

- Il existe une .... de solutions de l'équation $y' = ay + b$.

  Une seule d'entre elles vérifie la condition initiale $y(x_0) = k$ où .... sont deux réels donnés.

Exemple

L'unique solution de l'équation $3y' - 2y = 3$ vérifiant $y(1) = 2$ est la fonction $x \mapsto$ ....

07-02 Exercice

1. Déterminer la fonction dérivée des fonctions ci-dessous

a] $f(x) = x\sqrt{x}$

b] $g(x) = x\ln(x) - x$

2. Résoudre les équations différentielles ci-dessous.

a] $y' = \sqrt{x}$

b] $y' - \ln(x) = x$

c] $y' - \frac{1}{x} = -4$

d] $y' + x = 4x^2 + 5$

e] $y' = 3y$

f] $y' = e^{2x} - 6e^{5x+1}$

g] $5y' + 4y = 0$

h] $y' - \frac{1}{x^2} = \frac{3}{x^3}$

i] $y' = -4y + 5$

j] $y' = 3x^2(x^3 + 2)^4$

k] $3y' - 2y = 3$

l] $y' = \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}$