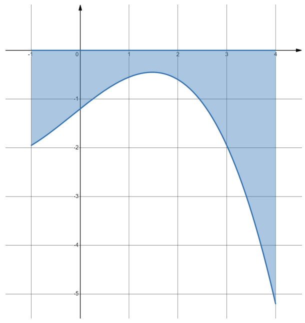
09-03 Calculs d'aires

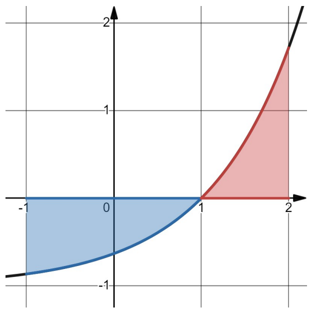
Propriété



Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.
Soit Cf sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

L'aire comprise entre Cf, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est : $-\int_a^b f(x)\,dx$

Exemple



On a ci-contre la représentation graphique de $f(x) = e^{x-1} - 1$.
La surface bleue a pour aire :

$$-\int_{-1}^{1} e^{x-1}-1\,dx = -\left[e^{x-1}-x\right]_{-1}^{1}$$
$$= -\left[\,e^{1-1} - 1 - (e^{(-1)-1} - (-1))\right]$$
$$= -\left[\,1 - 1 - (e^{-2} + 1)\right]$$
$$= 1 + e^{-2}$$
$$\approx 1{,}14$$

Propriété - relation de Chasles

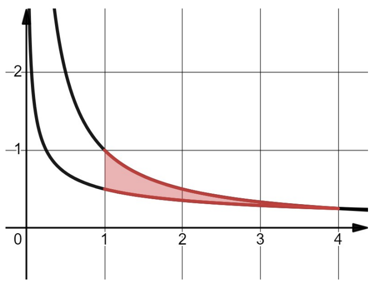
Soit f une fonction continue un intervalle $[a\ ;\ b]$.
Pour toute valeur $c \in [a\ ;\ b]$, on a : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

Remarques

- Dans l'exemple précédent, l'intégrale $\int_{-1}^{2} e^{x-1}-1\,dx$ est égale à $\int_{-1}^{1} e^{x-1}-1\,dx + \int_{1}^{2} e^{x-1}-1\,dx$ et ce calcul donne la différence entre les aires rouge et bleue.
  Pour connaître l'aire totale colorée, il faut calculer $-\int_{-1}^{1} e^{x-1}-1\,dx + \int_{1}^{2} e^{x-1}-1\,dx$.

- Si une fonction $f(x) \geqslant g(x)$ sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ alors l'aire comprise entre les courbes représentatives de f et g et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est : $\int_a^b f(x)-g(x)\,dx$.

Exemple



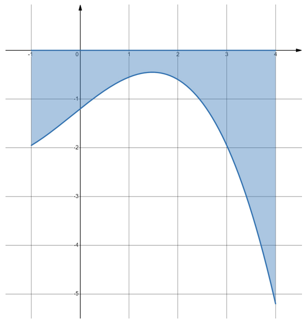
On a représenté ci-contre les fonctions $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

L'aire colorée vaut $\int_1^4 \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \left[\ln(x) - \sqrt{x}\right]_1^4$

$$= \ln 4 - \sqrt{4} - \ln 1 + \sqrt{1}$$
$$= 2\ln 2 - 1 \approx 0{,}39.$$

09-03 Calculs d'aires

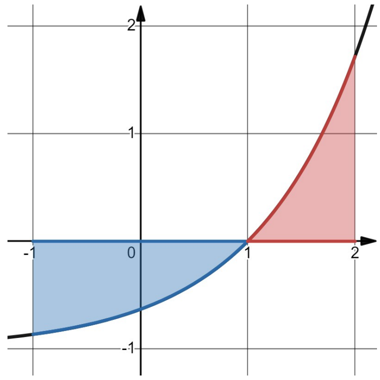
Propriété



Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle $[a ; b]$.
Soit Cf sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

L'aire comprise entre Cf, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est : $-\int_a^b f(x)\,dx$

Exemple



On a ci-contre la représentation graphique de $f(x) = e^{x-1} - 1$.
La surface bleue a pour aire :

.... = ...

= ....

= ....

= ....

Propriété - relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$.
Pour toute valeur $c \in [a ; b]$, on a : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

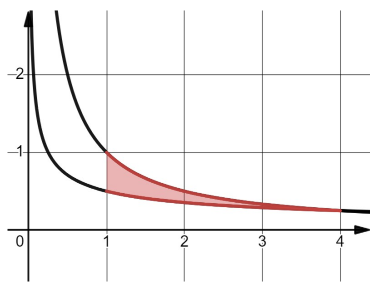
Remarques

- Dans l'exemple précédent, l'intégrale .... est égale à .... + ... et ce calcul donne la différence entre les aires rouge et bleue.

  Pour connaître l'aire totale colorée, il faut calculer .... + ...

- Si une fonction $f(x) \geqslant g(x)$ sur un intervalle $[a ; b]$ alors l'aire comprise entre les courbes représentatives de f et g et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est : ....

Exemple



On a représenté ci-contre les fonctions $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

L'aire colorée vaut $\int_1^4$ .... = ...

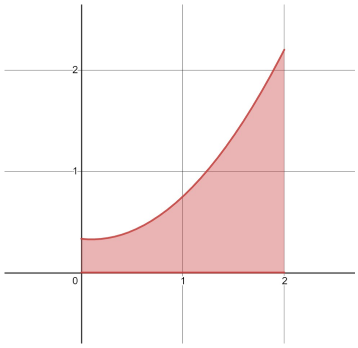
= ....

= ....

09-03 Exercice

Estimer puis calculer chacune des aires suivantes en arrondissant éventuellement au dixième.

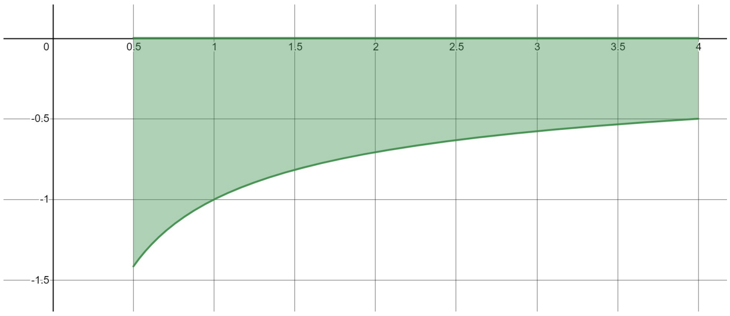
a] $x \to \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{x+3}$.



Estimation :

Calcul :

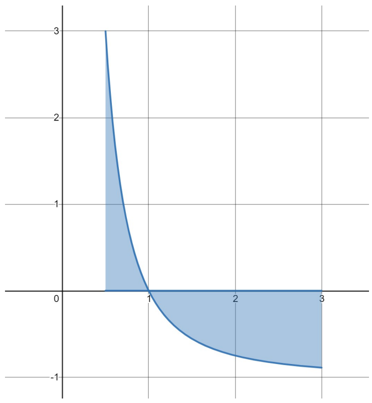
b] $x \to -\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.



Estimation :

Calcul :

c] $x \to \dfrac{1}{x^2} - 1$.



Estimation :

Calcul :

d]