10-03 Loi uniforme sur un intervalle

Définition et notation

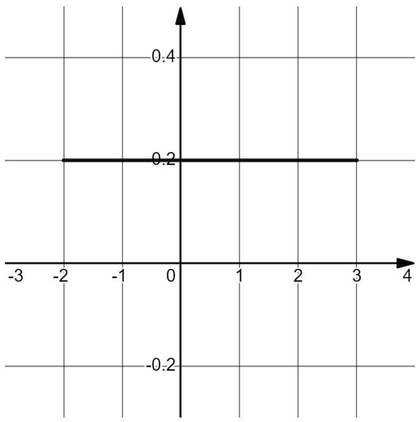
Soient deux réels a et b tels que $a < b$.

Soit la fonction constante f définie sur $[a ; b]$ par $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$

Soit X la variable aléatoire dont la fonction de densité est f.

On dit que ***X* suit la loi uniforme sur [*a* ; *b*]**. On la note : **loi $\mathcal{U}([a ; b])$.**

Exemple



La fonction f représentée ci-contre est définie par $f(x) = \dfrac{1}{5}$ sur $[-2 ; 3]$.

On a : $\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{5}\right]_{-2}^{3}$

$\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{5} - \left(-\frac{2}{5}\right)$

$\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$

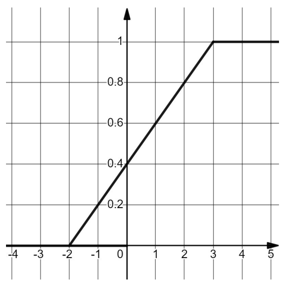
Donc f est une fonction de densité à partir de laquelle on peut définir la variable aléatoire de loi $\mathcal{U}([-2 ; 3])$.

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur un intervalle $I = [a ; b]$.

Pour tout intervalle $[c ; d]$ inclus dans I on a : $\mathrm{P}(c < X < d) = \dfrac{d-c}{b-a}$.

Remarque



La fonction F de répartition de X est définie par : $\begin{cases} F(x) = 0 & \text{si } x < a \\ F(x) = \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a < x < b \\ F(x) = 1 & \text{si } b < x \end{cases}$

Propriétés

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur un intervalle $I = [a ; b]$.
On a alors :

- $\mathrm{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}$
- $\mathrm{V}(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$
- $\sigma(X) = \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$