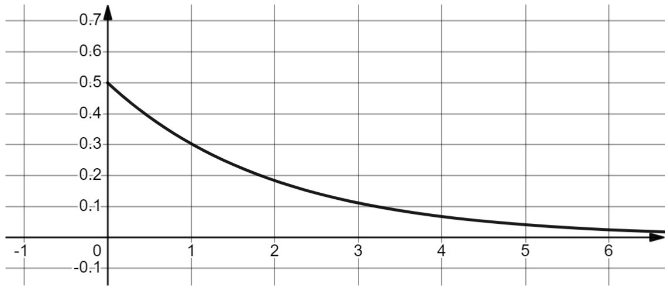
10-04 Activité

Soit la fonction *f* définie sur [0 ; +∞[par : $x \to 0{,}5\, e^{-0{,}5\,x}$



1. Déterminer si *f* est une fonction de densité de support [0 ; +∞[.

2. Soit *X* la variable aléatoire continue à densité *f*.

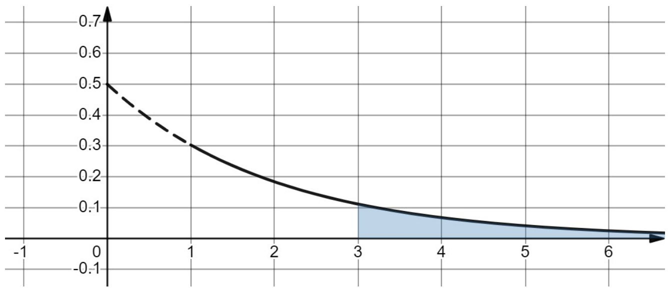
a] Calculer P($X \leqslant 2$).

b] Calculer P($X > 2$).

c] Calculer P($X > 1$).

d] Calculer P($X > 3$).

3 **a]** Calculer $\mathrm{P}_{X>1}(X>3)$



b] On remarque que $\mathrm{P}_{X>1}(X>3)=\mathrm{P}(\quad)$.

c] Une particule radioactive est créée au temps 0 et la probabilité qu'elle se désintègre au bout de *t* années est modélisée par la variable aléatoire *X* décrite précédemment.

- La probabilité d'attendre au moins 2 ans pour que la particule se désintègre vaut environ ....
- La particule ne s'est pas désintégrée la première année. La probabilité d'attendre encore au moins 2 ans pour que la particule se désintègre vaut environ ....

4. **a]** Calculer E(*X*).

b] Calculer V(*X*).

10-04 Loi exponentielle

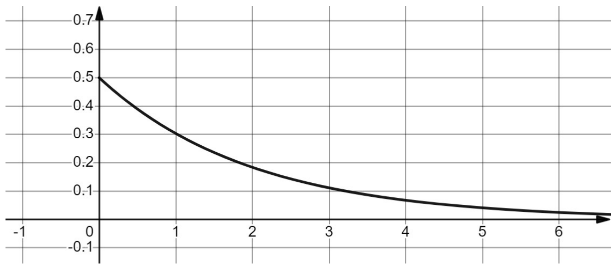
Définition et notation

Soit λ un réel strictement positif et soit la fonction *f* définie par : $\begin{cases} f(x) = \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Soit *X* la variable aléatoire dont la fonction de densité est *f*.
On dit que *X* suit **la loi exponentielle de paramètre λ**. On la note : **loi $\mathcal{E}$(λ).**

Exemple

Soit la fonction *f* définie par : $\begin{cases} f(x) = 0{,}5\, e^{-0{,}5x} & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$



On a : $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = -\left[e^{-0{,}5x}\right]_0^{+\infty}$

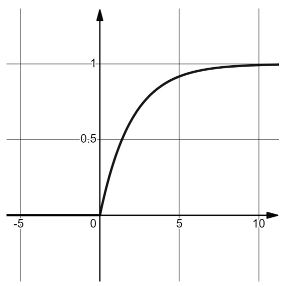
$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = -(0-1)$

$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$

Donc *f* est une fonction de densité à partir de laquelle on peut définir la variable aléatoire de loi $\mathcal{E}$(0,5).

Remarque

La fonction *F* de répartition de *X* est définie par : $\begin{cases} F(x) = 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ F(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$



Propriété

Soit *X* une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ > 0.
Quels que soient les nombres positifs *s* et *t* on a : $\mathrm{P}_{X>t}(X > t+s) = \mathrm{P}(s)$.

Remarques

On dit que la loi exponentielle est une loi « sans mémoire ».
Prenons le cas où *X* est le nombre d'années nécessaires à la réalisation d'un événement.
La réponse à la question suivante est la même, quel que soit le moment où elle est posée :
« Quelle est la probabilité pour que *X* soit supérieur à 2 ans à partir de maintenant ? »

Propriétés

Soit *X* une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ > 0. On a alors :

- E(*X*) = $\frac{1}{\lambda}$
- V(*X*) = $\frac{1}{\lambda^2}$
- σ(*X*) = $\frac{1}{\lambda}$