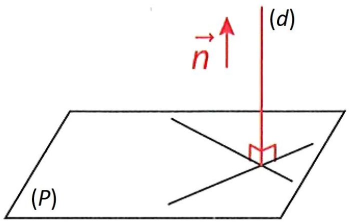
10-03 Équation cartésienne d'un plan

Définition



Soit une droite (*d*) orthogonale à un plan (*P*) de l'espace.

Si le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur directeur de (*d*) alors on dit que $\vec{n}$ est **normal** au plan (*P*).

Exemple

Le plan passant par *A*(1 ; 2 ; -1) et de vecteur normal $\vec{n}(3\,;-2\,;4)$ est formé des points *M*(*x* ; *y* ; *z*) vérifiant :

....

....

ou encore : ....

Définition

Soient quatre réels *a*, *b*, *c* et *d*.

Les points *M*(*x* ; *y* ; *z*) vérifiant l'égalité $ax + by + cz + d = 0$ définissent un plan de l'espace.

Cette égalité est une **équation cartésienne** du plan.

Propriété

Le plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ a pour vecteur normal $\vec{u}$ (*a* ; *b* ; *c*).

Exemple

Le plan passant par *A*(1 ; 0 ; -1) et de vecteur normal $\vec{n}(3\,;-2\,;4)$ a pour équation : ....

Remarques

- Le plan (*xOy*) est l'ensemble des poins de .... nulle. Il a donc pour équation cartésienne ....
- Un vecteur normal à un plan est normal à tous les plans .... à ce plan.

  Si deux équations de plans ne diffèrent que par le terme .... , alors ces plans sont parallèles.

10-03 Applications du cours

Application 1

Dans chacun des cas suivants, on considère deux plans. Étudier leur position relative.

- S'ils sont parallèles, calculer la distance qui les sépare.
- S'ils sont sécants, déterminer avec précision leur intersection.

a] (P_1) : $2x + y - 3z + 5 = 0$ (P'_1) : $x - y + 2z = 0$

b] (P_2) : $5x - 15y + 20z - 5 = 0$ (P'_2) : $-3x + 9y - 12z - 6 = 0$

Application 2

Dans chacun des cas suivants, on considère un plan et une droite. Étudier leur position relative.

- S'ils sont parallèles, calculer la distance qui les sépare.
- S'ils sont sécants, déterminer leur intersection et la mesure de l'angle formé, au dixième de degré près.

a] (d_3) : $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -2t \\ z = 1 + 5t \end{cases}$ (avec $t \in \mathbb{R}$) (P_3) : $-x + 4y + z - 8 = 0$

b] (d_4) : $\begin{cases} x = -4 + 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = 5 - t \end{cases}$ (avec $t \in \mathbb{R}$) (P_4) : $3x - y + 2z + 1 = 0$

Application 3

Dans chacun des cas suivants, on considère deux droites. Étudier leur position relative.

- Si elles sont parallèles ou sécantes, exprimer l'équation du plan qu'elles définissent.
- Si elles ne sont ni parallèles ni sécantes, calculer la distance qui les sépare.

a] (d_5) : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + t \\ z = -4 - 2t \end{cases}$ (avec $t \in \mathbb{R}$) et (d'_5) : $\begin{cases} x = 2t' \\ y = 1 + t' \\ z = 3 + t' \end{cases}$ (avec $t' \in \mathbb{R}$)

b] (d_6) : $\begin{cases} x = -5 + 6t \\ y = 3 + 4t \\ z = -2t \end{cases}$ (avec $t \in \mathbb{R}$) et (d'_6) : $\begin{cases} x = -1 - 9t' \\ y = 2 - 6t' \\ z = 1 + 3t' \end{cases}$ (avec $t' \in \mathbb{R}$)

c] (d_7) : $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$ (avec $t \in \mathbb{R}$) et (d'_7) : $\begin{cases} x = -2 + t' \\ y = 1 - 3t' \\ z = 6 - t' \end{cases}$ (avec $t' \in \mathbb{R}$)