06-03 Propriétés du produit scalaire

Propriété de symétrie

Le produit scalaire est symétrique : on a $\vec{u}\,.\,\vec{v}=\vec{v}\,.\,\vec{u}$ pour tout couple de vecteurs $(\vec{u}\,;\vec{v})$.

Remarques

- Cette propriété se démontre aisément avec la définition trigonométrique.
- On ne parle pas de « commutativité » ici car ce terme est réservé aux lois de composition internes, or le produit scalaire de deux vecteurs n'est pas un vecteur.

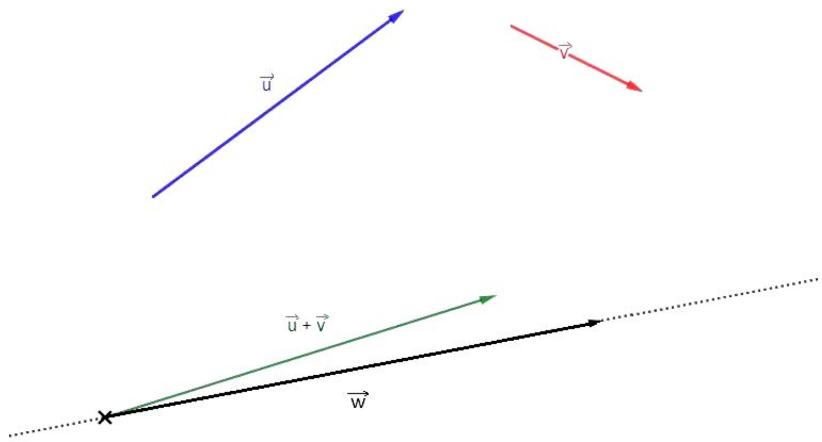
Propriétés de linéarité

Le produit scalaire est linéaire :

- Pour tout couple de vecteurs $(\vec{u}\,;\vec{v})$ et pour tout réel λ on a $(\lambda\vec{u}).\vec{v}=\lambda\times(\vec{u}\,.\,\vec{v})$
- Pour tout triplet de vecteurs $(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w})$ on a $\vec{w}.(\vec{u}+\vec{v})=\vec{w}\,.\,\vec{u}+\vec{w}\,.\,\vec{v}$

Remarques

- Cette dernière propriété se comprend à l'aide de la définition par projection.



- Une conséquence de ces propriétés est la double-distributivité appliquée au produit scalaire : $(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{u}+\vec{v})=\vec{a}\,.\,\vec{u}+\vec{a}\,.\,\vec{v}+\vec{b}\,.\,\vec{u}+\vec{b}\,.\,\vec{v}$
- Cas particulier : $(\vec{u}+\vec{v})^2=\|\vec{u}\|^2+2\times\vec{u}\,.\,\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$

Propriété caractéristique

Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vaut $\vec{u}\,.\,\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$

06-03 Propriétés du produit scalaire

Propriété de symétrie

Le produit scalaire est symétrique : on a $\vec{u}\,.\,\vec{v}=\vec{v}\,.\,\vec{u}$ pour tout couple de vecteurs $(\vec{u}\,;\vec{v})$.

Remarques

- Cette propriété se démontre aisément avec la définition trigonométrique.
- On ne parle pas de .... ici car ce terme est réservé aux lois de composition internes, or le produit scalaire de deux vecteurs n'est pas un ....

Propriétés de linéarité

Le produit scalaire est linéaire :

- Pour tout couple de vecteurs $(\vec{u}\,;\vec{v})$ et pour tout réel λ on a $(\lambda\,\vec{u}).\vec{v}=\lambda\times(\vec{u}\,.\,\vec{v})$
- Pour tout triplet de vecteurs $(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w})$ on a $\vec{w}\,.(\vec{u}+\vec{v})=\vec{w}\,.\vec{u}+\vec{w}\,.\vec{v}$

Remarques

- Cette dernière propriété se comprend
  à l'aide de la définition par projection.

- Une conséquence de ces propriétés est la double-distributivité appliquée au produit scalaire :

  $(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{u}+\vec{v})=$ ....

- Cas particulier : $(\vec{u}+\vec{v})^2=$ ....

Propriété caractéristique

Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vaut $\vec{u}\,.\,\vec{v}=\frac{1}{2}(\,\|\vec{u}+\vec{v}\,\|^2-\,\|\vec{u}\,\|^2-\,\|\vec{v}\,\|^2)$