06-04 Dans un repère orthonormé

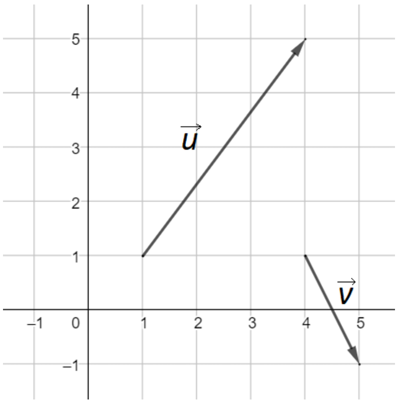
Propriété caractéristique

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.

Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vaut $\vec{u}\,.\,\vec{v} = xx' + yy'$

Exemple

On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ ci-contre.



Leur produit scalaire vaut :

$$\begin{aligned}\vec{u}\,.\,\vec{v} &= 3\times1 + 4\times(-2)\\ &= 3 - 8\\ &= -5\end{aligned}$$

Démonstration

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.

On a : $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$
et $\vec{v} = x'\,\vec{i} + y'\,\vec{j}$

On a donc $\vec{u}\,.\,\vec{v} = (x\,\vec{i} + y\,\vec{j}).(x'\,\vec{i} + y'\,\vec{j})$

$= xx'\,\vec{i}^{\,2} + xy'\,\vec{i}\,.\,\vec{j} + yx'\,\vec{j}\,.\,\vec{i} + yy'\,\vec{j}^{\,2}$ or $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux donc $\vec{i}\,.\,\vec{j} = 0$

$= xx'\,\vec{i}^{\,2} + yy'\,\vec{j}^{\,2}$ or $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont pour norme 1

$= xx' + yy'$

06-04 Dans un repère orthonormé

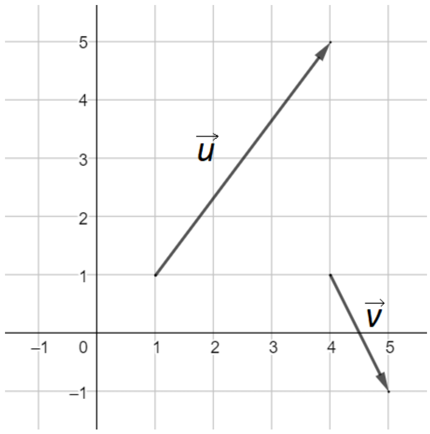
Propriété caractéristique

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.

Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vaut $\vec{u}\,.\,\vec{v} = xx' + yy'$

Exemple

On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}\quad\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\quad\end{pmatrix}$ ci-contre.



Leur produit scalaire vaut :

$\vec{u}\,.\,\vec{v}$ = ...

= ....

= ....

Démonstration

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.

On a : $\vec{u}$ = ... $\vec{i}$ + ... $\vec{j}$
et $\vec{v}$ = ... $\vec{i}$ + ... $\vec{j}$

On a donc $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ = (........ + ...).(........ + ...)

= .... or $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux donc ....

= .... or $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont pour norme ....

= ....