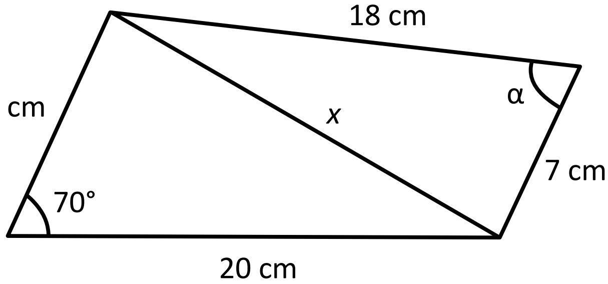
Énoncés

Exercice 1

Déterminer la longueur x et l'angle α du quadrilatère représenté ci-contre.

Arrondir à l'unité les valeurs trouvées pour x et α.



Exercice 2

Dessiner des schémas sur lesquels sont indiquées, sans justification, les mesures des côtés et des angles des triangles suivants, éventuellement arrondies à l'unité.

a] Triangle ABC avec AB = 5 cm ; BC = 6 cm et AC = 7 cm.

b] Triangle DEF avec DE = 66 cm ; DF = 93 cm et $\widehat{EDF}=40°$.

c] Triangle GHI avec GH = 92 cm ; GI = 54 cm et $\widehat{GIH}=105°$.

d] Triangle JKL avec KL = 52 cm ; $\widehat{KJL}=72°$ et $\widehat{JLK}=51°$.

Exercice 3

On considère un triangle ABC tel que AB = 9 cm ; BC = 11 cm et $\widehat{BCA}=50°$.

1. Dessiner ABC soigneusement à l'aide des instruments de géométrie.
Quel problème rencontre-t-on ?

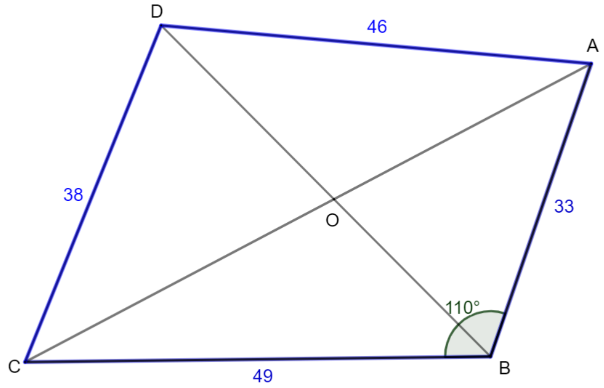
2. a] Démontrer que AC est solution de l'équation : $x^2 - 22\cos(50°)x + 40 = 0$
b] Résoudre cette équation en arrondissant les solutions éventuelles au dixième.
c] Ce résultat est-il cohérent avec la question **1.** ?

3. a] Montrer que l'on a $\sin\left(\widehat{BAC}\right)=\dfrac{11}{9}\sin\left(50°\right)$.
b] Que peut-on déduire de cette égalité concernant la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$?
c] Ce résultat est-il cohérent avec la question **1.** ?

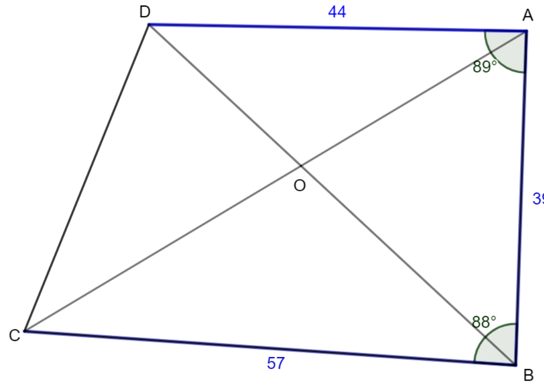
Exercice 4

1. Sans effectuer les calculs, écrire les étapes nécessaires pour déterminer les valeurs demandées.

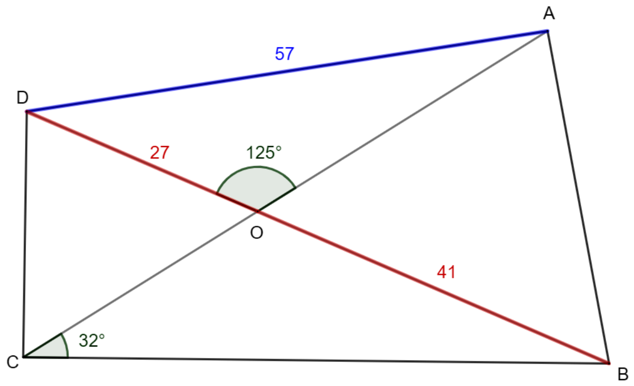
a] Angle $\widehat{DAC}$?



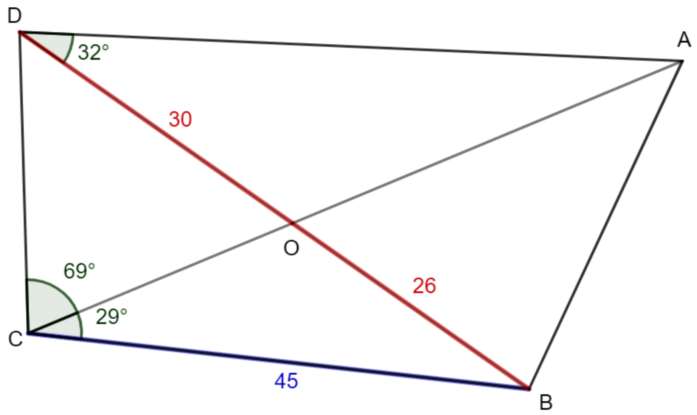
b] Angle $\widehat{AOB}$?



c] Longueur CD ?



2. On considère la figure ci-contre.
Calculer la longueur AB et donner un arrondi de cette valeur au centième près.



Exercice 5

Compléter le programme Python ci-dessous de résolution de triangle en s'aidant des indications grisées.

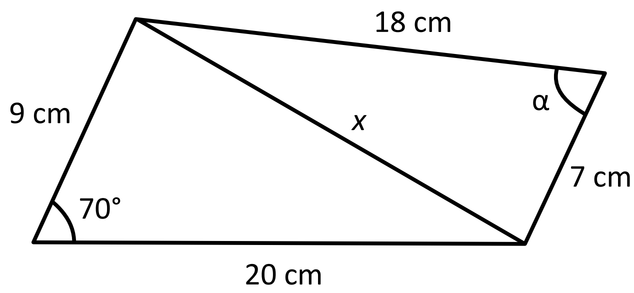
```
.........................................            # Importer le module math dans sa totalité

def vers_degres(angle_radian):
    return angle_radian*180/pi

.........................................            # Définir une fonction convertissant des degrés vers les radians
.........................................

soluble = True
solution_unique = True
choix = int(input("Combien de côtés connaît-on dans le triangle ABC ?"))

.........................................            # Cas où l'on connaît 3 côtés du triangle

    AB = float(input("Quelle est la longueur AB ?"))
    BC = float(input("Quelle est la longueur BC ?"))
    AC = float(input("Quelle est la longueur AC ?"))
    If .........................................     # Le triangle doit vérifier l'inégalité triangulaire
        angleC = .........................................   # Déterminer chaque angle à partir des longueurs du triangle
        angleB = .........................................
        angleA = .........................................
    else:
        soluble = False

.........................................            # Cas où l'on connaît 2 côtés du triangle

    AB = float(input("Quelle est la longueur AB ?"))
    BC = float(input("Quelle est la longueur BC ?"))
    angleB = float(input("Quelle est la mesure en degrés de l'angle opposé à [AC] ? (entrer 0 si cette mesure
est inconnue)"))
    angleB = ....................                    # Convertir angleB en radians
    if angleB==0:
        angleA = float(input("Quelle est la mesure en degrés de l'angle opposé à [BC] ?"))
        angleA = ....................                # Convertir angleA en radians
        if BC<AB:
            if angleA<asin(BC/AB):
                solution_unique = False
                angleC1 = asin(AB*sin(angleA)/BC)
                angleB1 = pi - angleA - angleC1
                AC1 = ....................           # Compléter à l'aide des mesures connues
                angleC2 = ....................       # Il y a une autre valeur possible pour angleC
                angleB2 = ....................
                AC2 = ....................
            elif angleA == asin(BC/AB):
                angleC = pi/2
```

```
                angleB = pi/2 - angleA
                AC = sqrt(AB**2 - BC**2)
            else:
                soluble = False
        else:
            ........................................          # Dans le cas où BC>AB, le problème a une solution unique
            ........................................
            ........................................
    else:
        ........................................              # Cas où angleB est connu
        ........................................
        ........................................

........................................                      # Cas où l'on connaît 1 côté du triangle

    AB = float(input("Quelle est la longueur AB ?"))
    angleA = float(input("Quelle est la mesure en degrés de l'angle opposé à [BC] ?"))
    ........................................                  # Convertir angleA en radians
    angleB = float(input("Quelle est la mesure en degrés de l'angle opposé à [AC] ?"))
    ........................................
    angleC = ........................................
    AC = ....................
    BC = ....................

print("")
if soluble:
    print("Dans le triangle ABC :")
    print("AB =", ....................
    print("BC =", ....................
    if solution_unique:
        print("AC =", ....................
        angleB = vers_degres(angleB)
        angleC = vers_degres(angleC)
        print("L'angle opposé à [AC] mesure ", ....................
        print("L'angle opposé à [AB] mesure ", ....................
    else:
        print("AC =", ....................
        angleA = vers_degres(angleA)
        print("L'angle opposé à [BC] mesure ", ....................
        angleB1 = vers_degres(angleB1)
        angleC1 = vers_degres(angleC1)
        angleB2 = vers_degres(angleB2)
        angleC2 = vers_degres(angleC2)
        print("L'angle opposé à [AC] mesure ", ....................
        print("L'angle opposé à [AB] mesure ", ....................
else:
    ........................................
```

Corrigés

Exercice 1

On applique à deux reprises la formule d'Al-Kashi :



- $x^2 = 9^2 + 20^2 - 2\times9\times20\cos(70°)$

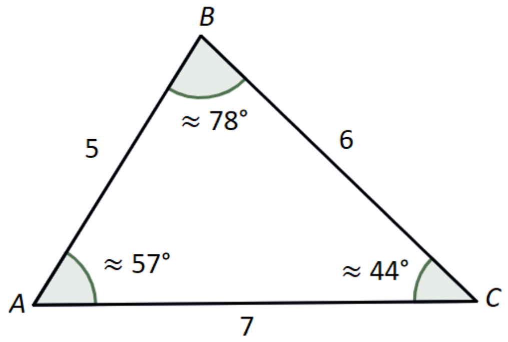
  donc $x = \sqrt{481 - 360\cos(70°)} \approx \mathbf{19\,cm}$

- $x^2 = 18^2 + 7^2 - 2\times7\times18\cos(\alpha)$
  $x^2 = 373 - 252\cos(\alpha)$
  $481 - 360\cos(70°) = 373 - 252\cos(\alpha)$
  $360\cos(70°) - 108 = 252\cos(\alpha)$

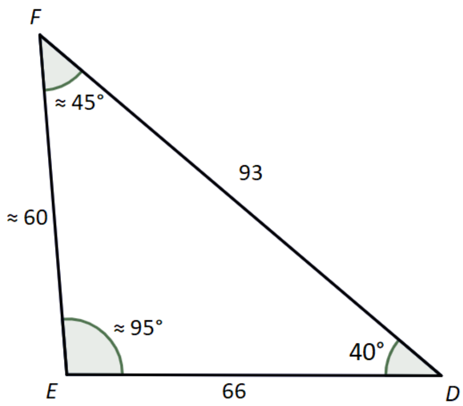
  donc $\alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{360\cos(70°) - 108}{252}\right) \approx \mathbf{87°}$

Exercice 2

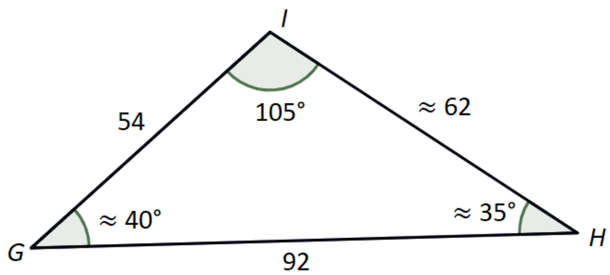
a]



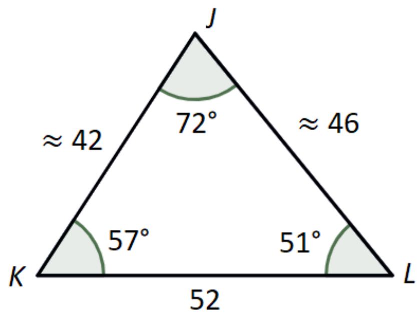
b]



c]

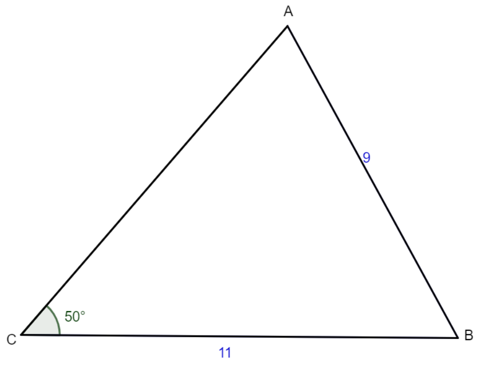


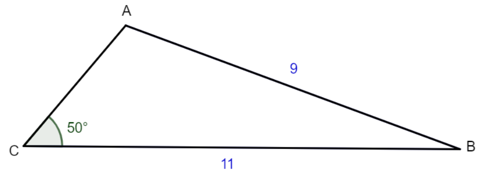
d]



Exercice 3

1. Quand on tente de dessiner *ABC*, on se rend compte que deux triangles différents sont possibles :





2. a] Formule d'Al-Kashi dans *ABC* : $9^2 = AC^2 + 11^2 - 2\times 11\times AC\times\cos(50°)$

$81 = AC^2 + 121 - 22AC\cos(50°)$

$0 = AC^2 - 22AC\cos(50°) + 40$

Donc *AC* est bien solution de l'équation $x^2 - 22\cos(50°)x + 40 = 0$

b] On a : $\Delta = (22\cos(50°))^2 - 4\times 1\times 40$

$\Delta = 484\cos^2(50°) - 160$

L'équation a deux solutions qui sont :

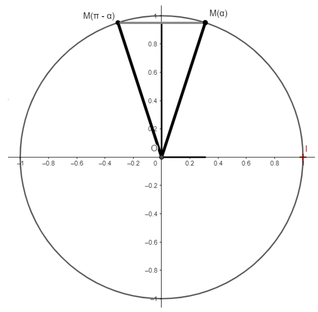
$x_1 = 11\cos(50°) - \sqrt{121\cos^2(50°) - 40}$ et $x_2 = 11\cos(50°) + \sqrt{121\cos^2(50°) - 40}$

On a donc **$x \approx 3{,}9$ cm ou $x \approx 10{,}2$ cm**.

c] Comme deux triangles *ABC* sont possibles, il est normal de trouver deux valeurs possibles pour *AC*.
De plus, ces deux valeurs semblent compatibles avec les dessins de la question 1.
Ce résultat est cohérent.

3. a] La formule des sinus, appliquée au triangle *ABC*, donne : $\dfrac{\sin(\widehat{BAC})}{11} = \dfrac{\sin(50°)}{9}$

On a donc bien : $\sin(\widehat{BAC}) = \dfrac{11}{9}\sin(50°)$.



b] À une valeur de $\sin(\widehat{BAC})$ correspondent deux angles $\widehat{BAC}$.

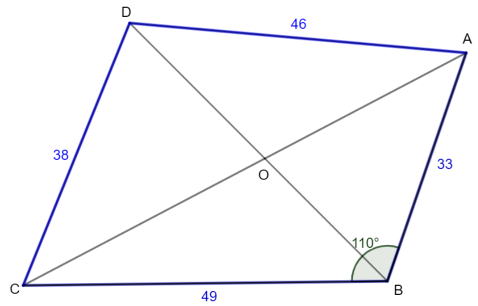
L'un de ces angles est aigu et vaut $\sin^{-1}\left(\dfrac{11}{9}\sin(50°)\right) \approx 69°$.

L'autre est obtus et sa mesure vaut $180 - \sin^{-1}\left(\dfrac{11}{9}\sin(50°)\right) \approx 111°$.

c] Comme deux triangles *ABC* sont possibles, il est normal de trouver deux valeurs possibles pour $\widehat{BAC}$.
De plus, ces deux valeurs semblent compatibles avec les dessins de la question 1.
Ce résultat est cohérent.

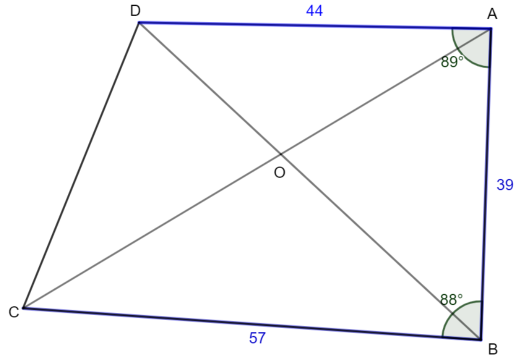
Exercice 4

1. a] Angle $\widehat{DAC}$?



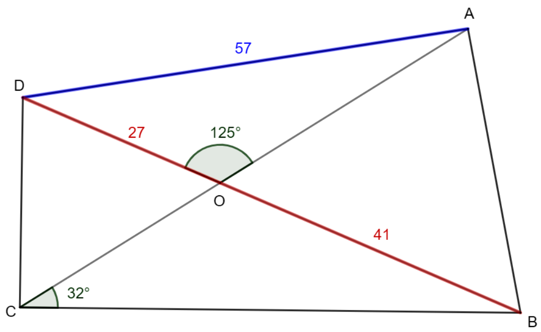
- Al-Kashi dans ABC : $AC^2 = 33^2 + 49^2 - 2\times33\times49\times\cos(110°)$
  On trouve AC.
- Al-Kashi dans ADC : $38^2 = 46^2 + AC^2 - 2\times46\times AC\times\cos(\widehat{DAC})$
  On trouve $\widehat{DAC}$.

b] Angle $\widehat{AOB}$?



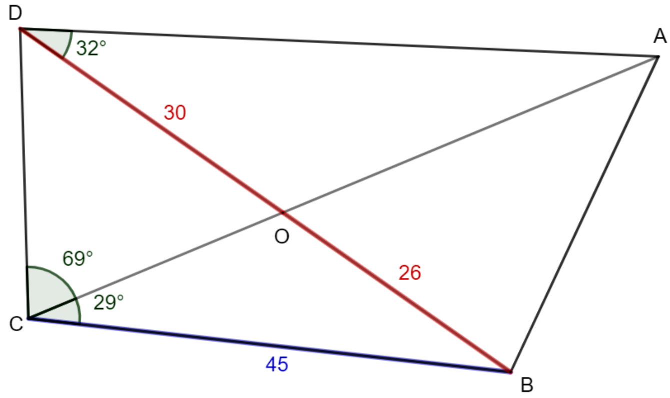
- Al-Kashi dans ABC : $AC^2 = 57^2 + 39^2 - 2\times57\times39\times\cos(88°)$
  On trouve AC.
- Al-Kashi dans ABC : $57^2 = 39^2 + AC^2 - 2\times39\times AC\times\cos(\widehat{CAB})$
  On trouve $\widehat{CAB}$.
- Al-Kashi dans ABD : $BD^2 = 44^2 + 39^2 - 2\times44\times39\times\cos(89°)$
  On trouve BD.
- Al-Kashi dans ABD : $44^2 = 39^2 + BD^2 - 2\times39\times BD\times\cos(\widehat{ABD})$
  On trouve $\widehat{ABD}$.
- Somme des angles du triangle AOB : $\widehat{ABD}+\widehat{CAB}+\widehat{AOB}=180°$.
  On trouve $\widehat{AOB}$.

c] Longueur CD ?



- Angles opposés par le sommet O : $\widehat{COB}=125°$. .
- Somme des angles du triangle COB : $32°+\widehat{OBC}+\widehat{COB}=180°$.
  On trouve $\widehat{OBC}$.
- Loi des sinus dans OBC : $\dfrac{41}{\sin(32°)}=\dfrac{CO}{\sin(\widehat{OBC})}$
  On trouve CO.
- Angles supplémentaires : $\widehat{COD}+125=180°$
  On trouve $\widehat{COD}$.
- Al-Kashi dans COD : $CD^2 = 27^2 + CO^2 - 2\times27\times CO\times\cos(\widehat{COD})$
  On trouve CD.

2. Déterminons la longueur *AB* :



- On a : $\mathbf{\widehat{BCD}=98°}$
  et : ***BD*** **= 56**.

- Loi des sinus dans *BCD* : $\dfrac{56}{\sin(98°)}=\dfrac{45}{\sin(\widehat{BDC})}$

  D'où : $\sin(\widehat{BDC})=\dfrac{45\sin(98°)}{56}$

  Comme $\widehat{BCD}$ est obtus alors $\widehat{BCD}$ est aigu.

  On trouve : $\mathbf{\widehat{BDC}=\sin^{-1}\left(\dfrac{45\sin(98°)}{56}\right)}\approx 53°$

- Somme des angles du triangle *COD* : $69°+\widehat{ODC}+\widehat{COD}=180°$.

  On trouve : $\mathbf{\widehat{COD}=111-\sin^{-1}\left(\dfrac{45\sin(98°)}{56}\right)}\approx 58°$

- Angles opposés par le sommet *O* : $\widehat{AOB}=\widehat{COD}$

  On trouve : $\mathbf{\widehat{AOB}=111-\sin^{-1}\left(\dfrac{45\sin(98°)}{56}\right)}\approx 58°$

- Angles supplémentaires : $\widehat{COD}+\widehat{AOD}=180°$

  On trouve : $\mathbf{\widehat{AOD}=69+\sin^{-1}\left(\dfrac{45\sin(98°)}{56}\right)}\approx 122°$.

- Somme des angles du triangle *AOD* : $32°+\widehat{AOD}+\widehat{DAO}=180°$.

  On trouve : $\mathbf{\widehat{DAO}=79-\sin^{-1}\left(\dfrac{45\sin(98°)}{56}\right)}\approx 26°$

- Loi des sinus dans *DAO* : $\dfrac{OA}{\sin(32°)}=\dfrac{30}{\sin(\widehat{DAO})}$

  On trouve : $\mathbf{OA=\dfrac{30\sin(32°)}{\sin(\widehat{DAO})}}\approx 36$

- Al-Kashi dans *AOB* : $AB^2 = 26^2 + OA^2 - 2\times 26\times OA\times\cos(\widehat{AOB})$

  On trouve : ***AB*** **≈ 31,36**.

Exercice 5

```
from math import *

def vers_degres(angle_radian):
    return angle_radian*180/pi

def vers_radians(angle_degres):
    return angle_degres*pi/180

soluble = True
solution_unique = True
choix = int(input("Combien de côtés connaît-on dans le triangle ABC ?"))

if choix==3:

    AB = float(input("Quelle est la longueur AB ?"))
    BC = float(input("Quelle est la longueur BC ?"))
    AC = float(input("Quelle est la longueur AC ?"))
    if AB<AC+BC and AC<AB+BC and BC<AB+AC:
        angleC = acos((BC**2 + AC**2 - AB**2)/(2*BC*AC))
        angleB = acos((BC**2 + AB**2 - AC**2)/(2*BC*AB))
        angleA = acos((AB**2 + AC**2 - BC**2)/(2*AB*AC))
    else:
        soluble = False

elif choix==2:

    AB = float(input("Quelle est la longueur AB ?"))
    BC = float(input("Quelle est la longueur BC ?"))
    angleB = float(input("Quelle est la mesure en degrés de l'angle opposé à [AC] ? (entrer 0 si cette mesure
est inconnue)"))
    angleB = vers_radians(angleB)
    if angleB==0:
        angleA = float(input("Quelle est la mesure en degrés de l'angle opposé à [BC] ?"))
        angleA = vers_radians(angleA)
        if BC<AB:
            if angleA<asin(BC/AB):
                solution_unique = False
                angleC1 = asin(AB*sin(angleA)/BC)
                angleB1 = pi - angleA - angleC1
                AC1 = sqrt(AB**2 + BC**2 - 2*AB*BC*cos(angleB1))
                angleC2 = pi - asin(AB*sin(angleA)/BC)
                angleB2 = pi - angleA - angleC2
                AC2 = sqrt(AB**2 + BC**2 - 2*AB*BC*cos(angleB2))
            elif angleA == asin(BC/AB):
                angleC = pi/2
                angleB = pi/2 - angleA
                AC = sqrt(AB**2 - BC**2)
            else:
```

```
                soluble = False
        else:
            angleC = asin(AB*sin(angleA)/BC)
            angleB = pi - angleA - angleC
            AC = sqrt(AB**2 + BC**2 - 2*AB*BC*cos(angleB))
    else:
        AC = sqrt(AB**2 + BC**2 - 2*AB*BC*cos(angleB))
        angleC = acos((BC**2 + AC**2 - AB**2)/(2*BC*AC))
        angleA = acos((AB**2 + AC**2 - BC**2)/(2*AB*AC))

elif choix==1:

    AB = float(input("Quelle est la longueur AB ?"))
    angleA = float(input("Quelle est la mesure en degrés de l'angle opposé à [BC] ?"))
    angleA = vers_radians(angleA)
    angleB = float(input("Quelle est la mesure en degrés de l'angle opposé à [AC] ?"))
    angleB = vers_radians(angleB)
    angleC = pi - angleA - angleB
    AC = AB*sin(angleB)/sin(angleC)
    BC = AB*sin(angleA)/sin(angleC)

print("")
if soluble:
    print("Dans le triangle ABC :")
    print("AB =",AB)
    print("BC =",BC)
    if solution_unique:
        print("AC =",AC)
        angleB = vers_degres(angleB)
        angleC = vers_degres(angleC)
        print("L'angle opposé à [AC] mesure ", round(angleB,2),"°")
        print("L'angle opposé à [AB] mesure ", round(angleC,2),"°")
    else:
        print("AC =",AC1," ou ",AC2)
        angleA = vers_degres(angleA)
        print("L'angle opposé à [BC] mesure ", round(angleA,2),"°")
        angleB1 = vers_degres(angleB1)
        angleC1 = vers_degres(angleC1)
        angleB2 = vers_degres(angleB2)
        angleC2 = vers_degres(angleC2)
        print("L'angle opposé à [AC] mesure ", round(angleB1,2),"° ou bien ",round(angleB2,2),"°")
        print("L'angle opposé à [AB] mesure ", round(angleC1,2),"° ou bien ",round(angleC2,2),"°")
else:
    print("Ce triangle est insoluble.")
```