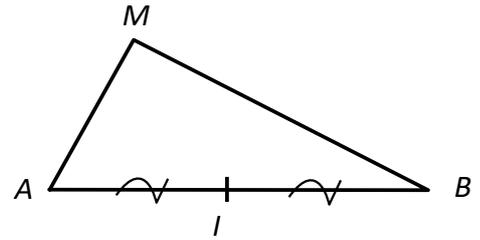


06-06 Propriétés de la médiane

Propriété caractéristique

Soit un segment $[AB]$ de milieu I .

Pour tout point M du plan, le produit scalaire de \vec{MA} et \vec{MB} vaut : $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - AI^2$



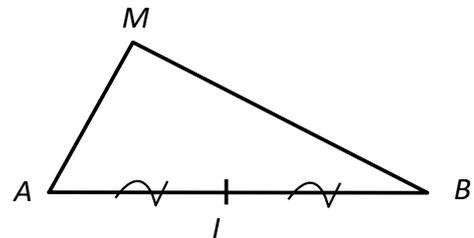
Remarques

- Cette propriété se démontre en utilisant la relation de Chasles : $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = (\vec{MI} + \vec{IA}) \cdot (\vec{MI} + \vec{IB})$
- Cette propriété permet de démontrer le théorème suivant :
« Un point M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si le triangle AMB est rectangle en M . »

Théorème de la médiane

Soit un triangle MAB avec I le milieu de $[AB]$.

On a alors : $MA^2 + MB^2 = 2(MI^2 + AI^2)$



Démonstration

Une propriété du parallélogramme est que $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$

On a donc : $(\vec{MA} + \vec{MB})^2 = 4\vec{MI}^2$

$$MA^2 + 2\vec{MA} \cdot \vec{MB} + MB^2 = 4MI^2$$

$$MA^2 + 2(MI^2 - AI^2) + MB^2 = 4MI^2$$

$$MA^2 + 2MI^2 - 2AI^2 + MB^2 = 4MI^2$$

D'où $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 2AI^2$

Exemple

On considère le parallélogramme $ABCD$ avec $AB = 8$ cm ; $AD = 4$ cm et $AC = 10$ cm.

Calculer BD .

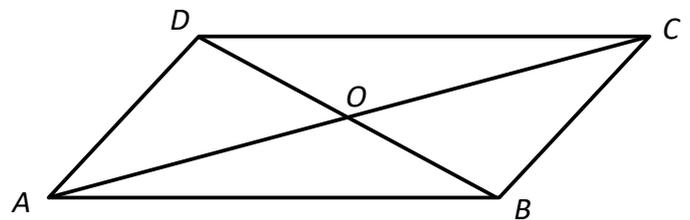
On a $AB^2 + AD^2 = 2AO^2 + 2DO^2$

$$64 + 16 = 2 \times 25 + 2DO^2$$

Donc $DO^2 = 15$

$$DO = \sqrt{15}$$

D'où $BD = 2\sqrt{15}$ cm $\approx 7,7$ cm

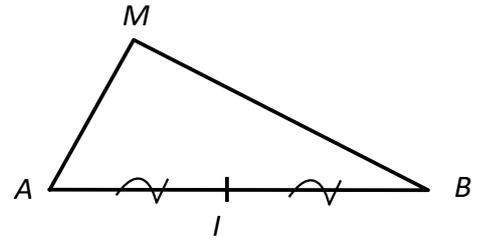


06-06 Propriétés de la médiane

Propriété caractéristique

Soit un segment $[AB]$ de milieu I .

Pour tout point M du plan, le produit scalaire de \vec{MA} et \vec{MB} vaut : $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - AI^2$



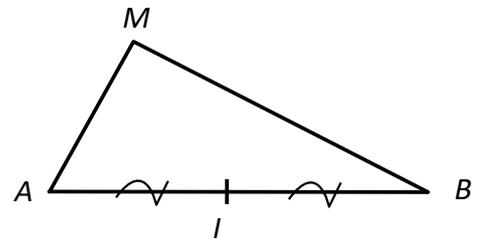
Remarques

- Cette propriété se démontre en utilisant la relation de Chasles :
- Cette propriété permet de démontrer le théorème suivant :
« M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si le triangle AMB est »

Théorème de la médiane

Soit un triangle MAB avec I le milieu de $[AB]$.

On a alors : $MA^2 + MB^2 = 2(MI^2 + AI^2)$



Démonstration

Une propriété du parallélogramme est que

On a donc : $(\vec{MA} + \vec{MB})^2 =$
.....
.....

D'où $MA^2 + MB^2 = 2 MI^2 + 2 AI^2$

Exemple

On considère le parallélogramme $ABCD$ avec $AB = 8$ cm ; $AD = 4$ cm et $AC = 10$ cm. Calculer BD .

.....
.....
.....
.....

