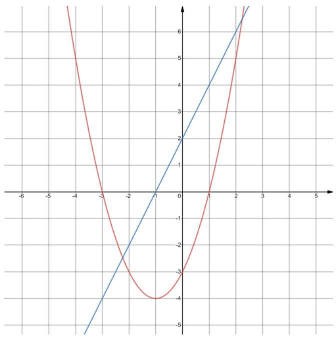
07-04 Sens de variation et extremums d'une fonction

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Affirmer que f est croissante sur I est équivalent à affirmer que, pour tout x de I, on a $f'(x) \geq 0$.
- Affirmer que f est constante sur I est équivalent à affirmer que, pour tout x de I, on a $f'(x) = 0$.
- Affirmer que f est décroissante sur I est équivalent à affirmer que, pour tout x de I, on a $f'(x) \leq 0$.

Exemple



Soit la fonction : $f(x) = x^2 + 2x - 3$ représentée par la courbe (C).
Sa dérivée est : $f'(x) = 2x + 2$ représentée par la courbe (C').

(-1) correspond au changement de signe de f' et au changement de sens de f.

Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit a un nombre réel appartenant à I.

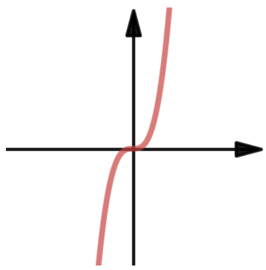
- Si pour tout x appartenant à I on a $f(x) \leq f(a)$ alors on dit que f atteint en a un **maximum** valant $f(a)$.
- Si pour tout x appartenant à I on a $f(a) \leq f(x)$ alors on dit que f atteint en a un **minimum** valant $f(a)$.

Dans les deux cas, on dit que f admet un **extremum** en a.

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit a un réel appartenant à I sans être une borne de I.
Si la fonction f admet un extremum en a alors $f'(a) = 0$.

Remarques



- La réciproque de cette propriété est fausse. Par exemple, la dérivée de la fonction cube s'annule en 0 sans pour autant que 0 soit un extremum.

- Dans l'exemple ci-dessous, f admet un minimum en 3 sans que la dérivée s'annule car 3 est une borne de l'intervalle de définition.

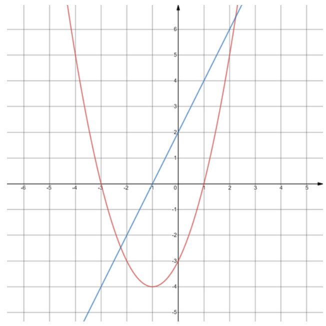
07-04 Sens de variation et extremums d'une fonction

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Affirmer que f est croissante sur I est équivalent à affirmer que, pour tout x de I, on a $f'(x) \geq 0$.
- Affirmer que f est constante sur I est équivalent à affirmer que, pour tout x de I, on a $f'(x) = 0$.
- Affirmer que f est décroissante sur I est équivalent à affirmer que, pour tout x de I, on a $f'(x) \leq 0$.

Exemple



Soit la fonction : $f(x) = x^2 + 2x - 3$ représentée par la courbe (C).

Sa dérivée est : $f'(x) =$ .... représentée par la courbe (C').

..... correspond au changement de signe de ..... et au changement de sens de .....

Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit a un nombre réel appartenant à I.

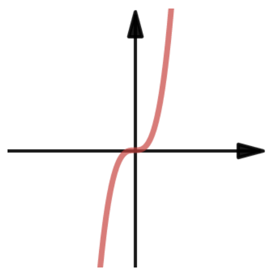
- Si pour tout x appartenant à I on a $f(x) \leq f(a)$ alors on dit que f atteint en a un **maximum** valant $f(a)$.
- Si pour tout x appartenant à I on a $f(a) \leq f(x)$ alors on dit que f atteint en a un **minimum** valant $f(a)$.

Dans les deux cas, on dit que f admet un **extremum** en a.

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit a un réel appartenant à I sans être une borne de I.
Si la fonction f admet un extremum en a alors $f'(a) = 0$.

Remarques



- La réciproque de cette propriété est fausse.
  Par exemple, la dérivée de la fonction cube s'annule en ..... sans pour autant qu'il y ait un ....

- Dans l'exemple ci-dessous, f admet un .... en 3 sans que la dérivée s'annule car 3 est une .... de l'intervalle de définition.