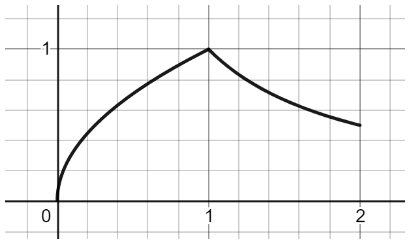
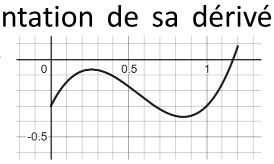
Les Épreuves Communes de Contrôle Continu (E3C) faisaient initialement partie de la réforme du bac de 2019. Elles sont composées d'exercices représentatifs de ce qu'un élève doit avoir retenu de son année de spécialité. Compter 30 minutes par exercice.

Énoncés

Exercice 1

Les questions de ce questionnaire à choix multiples (QCM) sont indépendantes.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Aucune justification n’est demandée mais il peut être nécessaire d’effectuer des recherches au brouillon.

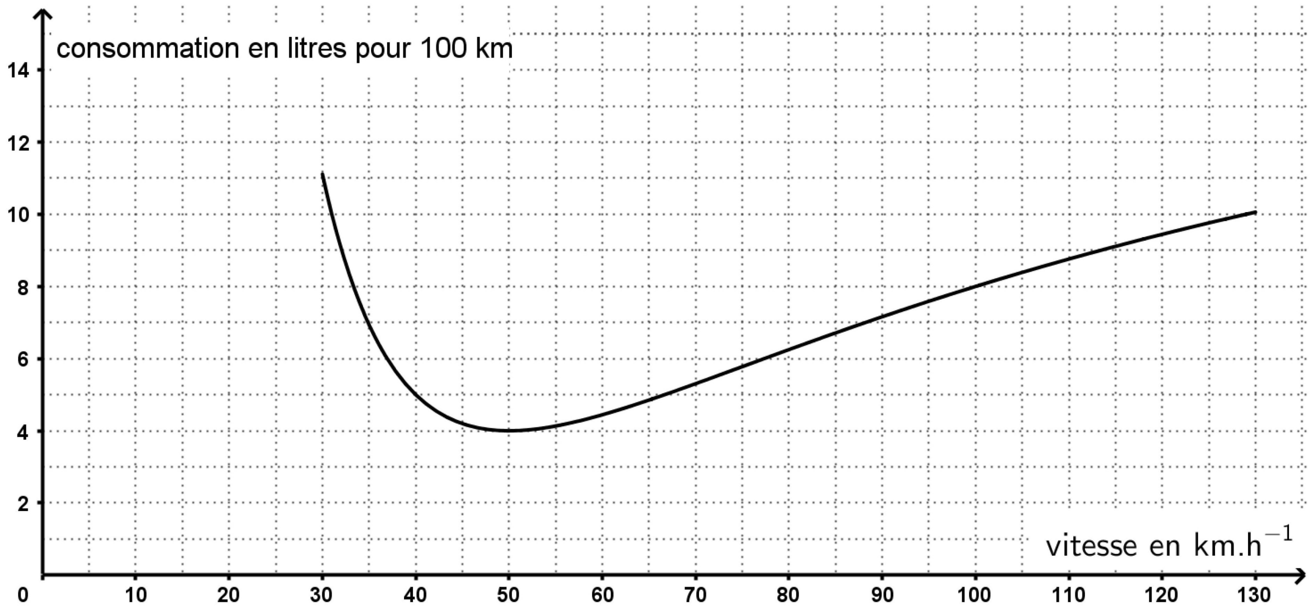
Questions	Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
1. Soit f définie sur [0;2] par : $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x} \text{ pour } x\in[0\,;1] \\ f(x)=\dfrac{1}{x} \text{ pour } x\in[1\,;2] \end{cases}$ 	f est dérivable sur [0;2]	f est dérivable sur $[0;1[\,\cup\,]1;2]$	f est dérivable sur $]0;1[\,\cup\,]1;2]$	f est dérivable sur $]0;1[\,\cup\,]1;2[$
2. Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I alors ...	les variations de f sont liées aux variations de f'	les variations de f sont liées au signe de f'	le signe de f est lié aux variations de f'	le signe de f est lié au signe de f'
3. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit g la fonction qui, à tout x de I, associe $xf(x)$. La fonction dérivée de g est ...	$f'(x)$	$xf'(x)$	$f(x) + f'(x)$	$f(x) + xf'(x)$
4. Soit f une foncion dérivable sur I et soient deux valeurs a et b de I telles que $f'(a) = 0$ et $f'(b) = 0$. La fonction f ...	n'admet pas forcément un extremum en a ou b.	admet forcément un extremum en a ou b.	admet forcément un extremum en a et b.	admet forcément un minimum en a ou b.
5. La fonction f est dérivable sur [0 ; 1,2] et la représentation de sa dérivée f' est donnée ci-contre : 	f n'admet pas forcément un extremum sur]0 ; 1,2[.	f admet un minimum sur]0 ; 1,2[et pas de maximum.	f admet un maximum sur]0 ; 1,2[et pas de minimum.	f admet un minimum et un maximum sur]0 ; 1,2[.

Exercice 2

On s'intéresse à la consommation d'essence d'un véhicule en fonction de sa vitesse.

Lecture graphique

Le graphique ci-dessous représente la consommation d'essence en litres pour 100 km en fonction de la vitesse en km.h^{-1} du véhicule.



Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes :

1. Quelle est la consommation du véhicule lorsque celui-ci roule à 40 km.h^{-1} ?
2. Pour quelle(s) vitesse(s) le véhicule consomme-t-il 8 litres pour 100 km ?
3. Pour quelle vitesse la consommation du véhicule semble-t-elle minimale ? Préciser cette consommation.

Modélisation

On note x la vitesse du véhicule en km.h^{-1} avec $30 \leqslant x \leqslant 130$.
La consommation d'essence en litres pour 100 km est modélisée par la fonction f d'expression suivante :

$$f(x)=\frac{20x^2-1600x+40\,000}{x^2}$$

On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle [30 ; 130].

4. Montrer que pour tout $x \in [30\ ;\ 130]$ on a : $f'(x)=\dfrac{800(2x-100)}{x^3}$
5. Démontrer la conjecture de la question **3.**

Exercice 3

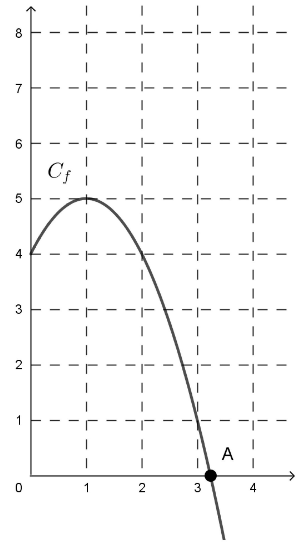
Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = -x^2 + 2x + 4$.
Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Dresser le tableau de variations de f sur $[0 ; +\infty[$.

2. Soit A le point d'intersection de (C) et de l'axe des abscisses.
Déterminer la valeur exacte de l'abscisse de A puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

3. On note (T) la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 2. Déterminer l'équation réduite de (T).

4. Tracer la droite (T) sur le graphique ci-contre à rendre avec la copie.

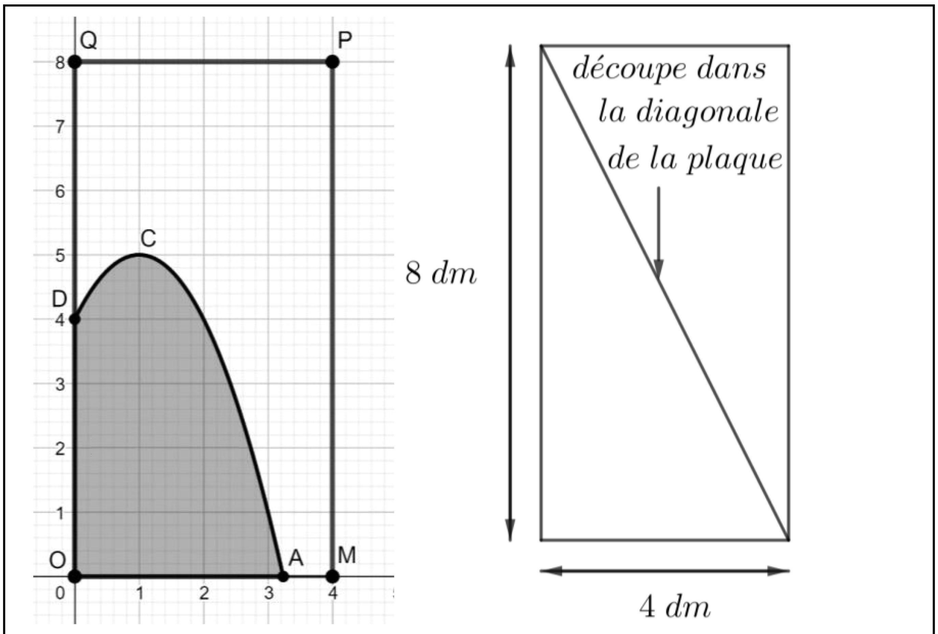


5. On admet que la courbe (C) est toujours en-dessous de la droite (T).
Une société reçoit une commande pour confectionner des logos dans des plaques rectangulaires de largeur 4 dm et de hauteur 8 dm selon le modèle ci-dessous.
Le bord supérieur du logo est modélisé par la courbe (C) tracée dans un repère orthonormé dont l'unité graphique est le décimètre (dm).

Les figures ci-contre ne sont pas à l'échelle.

Dans un souci d'économie, on aimerait pouvoir réaliser deux logos identiques dans une seule plaque, en la coupant dans sa diagonale.

Déterminer si c'est possible.



Logo à réaliser *Découpe selon la diagonale*

Exercice 4

Une entreprise produit du tissu.

Le coût total de production (en €) de l'entreprise est modélisé par la fonction $C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750$ où x est la longueur de tissu fabriqué exprimée en kilomètre, x étant compris entre 0 et 10.

Chaque kilomètre de tissu est vendu 680 €.

On note $B(x)$ le bénéfice réalisé par l'entreprise, c'est-à-dire la différence entre la recette et le coût de production pour la vente de x kilomètres de tissu.

1. Calculer le bénéfice réalisé par l'entreprise pour la vente de 3 kilomètres de tissu.

2. Montrer que $B(x) = -15x^3 + 120x^2 + 180x - 750$.

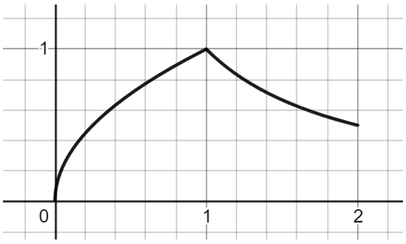
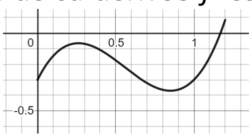
3. Déterminer l'expression de $B'(x)$, où B' est la fonction dérivée de B.

4. Étudier le signe de B' sur $[0 ; 10]$ puis dresser le tableau de variations de la fonction B sur $[0 ; 10]$.

5. Combien de kilomètres de tissu l'entreprise doit-elle produire afin d'obtenir un résultat maximal ?
Préciser le bénéfice réalisé.

Corrigés

Exercice 1

Questions	Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
1. Soit f définie sur [0;2] par : $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x} \text{ pour } x\in[0\,;1] \\ f(x)=\dfrac{1}{x} \text{ pour } x\in[1\,;2] \end{cases}$ 			*f* est dérivable sur]0;1[∪]1;2]	
2. Si *f* est une fonction dérivable sur un intervalle *I* alors ...		les variations de *f* sont liées au signe de *f'*		
3. Soit *f* une fonction dérivable sur un intervalle *I* et soit *g* la fonction qui, à tout *x* de *I*, associe *xf*(*x*). La fonction dérivée de *g* est ...				$f(x) + xf'(x)$
4. Soit *f* une foncion dérivable sur *I* et soient deux valers *a* et *b* de *I* telles que $f'(a) = 0$ et $f'(b) = 0$. Sur l'intervalle *I*, la fonction *f* ...	n'admet pas forcément un extremum en *a* ou *b*.			
5. La fonction *f* est dérivable sur [0 ; 1,2] et la représentation de sa dérivée *f'* est donnée ci-contre : 		*f* admet un minimum sur]0 ; 1,2[et pas de maximum.		

Exercice 2

Lecture graphique

1. Lorsque le véhicule roule à 40 km.h^{-1}, sa consommation est d'environ **5 litres pour 100 kilomètres**.

2. Le véhicule consomme 8 litres pour 100 km lorsqu'il roule à environ **33 km.h^{-1} et 100 km.h^{-1}**.

3. La consommation du véhicule semble-t-elle minimale lorsqu'il roule à environ **50 km.h^{-1}**.
Cette consommation est d'environ **4 litres pour 100 kilomètres**.

Modélisation

4. On a $f(x)=\dfrac{20x^2-1600x+40\,000}{x^2}$ donc $f(x)=20-\dfrac{1\,600}{x}+40\,000x^{-2}$

Pour tout $x\in[30\,;130]$ on a :

$$f'(x)=\frac{1\,600}{x^2}-2\times 40\,000\times x^{-3}$$

$$f'(x)=\frac{1\,600x}{x^3}-\frac{80\,000}{x^3}$$

On a donc bien $\boldsymbol{f'(x)=\dfrac{800(2x-100)}{x^3}}$

5. Pour tout $x\in[30\,;130]$ on a $x^3>0$ donc f' est du signe de $(2x-100)$.
On en déduit le tableau de variations suivant :

x	30		50		130
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

La fonction f atteint son minimum en 50 et celui-ci vaut $f(50)=\dfrac{20\times 50^2-1600\times 50+40\,000}{50^2}=4$.

La conjecture est entièrement vérifiée.

Exercice 3

f est la fonction définie sur [0 ; +∞[par $f(x) = -x^2 + 2x + 4$.

1. On a $f'(x) = -2x + 2$ d'où le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	5	↘	

2. Cherchons x tel que $f(x) = 0$

$-x^2 + 2x + 4 = 0$

Le discriminant de cette équation vaut $\Delta = 2^2 - 4\times(-1)\times 4 = 20$

L'équation a deux solutions qui sont :

$x_1 = \dfrac{-2-\sqrt{20}}{-2} = 1+\sqrt{5}$ et $x_2 = \dfrac{-2+\sqrt{20}}{-2} = 1-\sqrt{5}$ (hors domaine de définition)

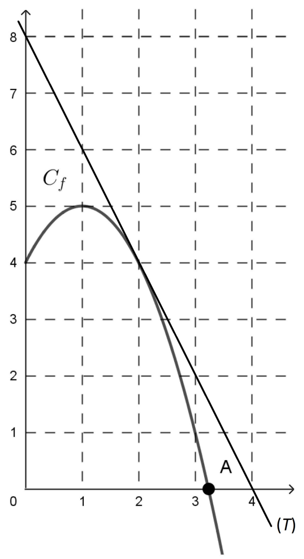
L'abscisse de *A* vaut $\mathbf{1+\sqrt{5}\approx 3{,}24}$

3. On a $f(2) = 4$ et $f'(2) = -2$.

D'où $(T) : y = -2(x-2) + 4$

$\mathbf{(T) : y = -2x + 8}$

4.



5. La courbe (*C*) est toujours en-dessous de la droite (*T*).

Or la droite (*T*) correspond au trait de découpe de la plaque, qui est la diagonale du rectangle.

Les deux parties du rectangle ainsi découpé sont les mêmes donc il sera possible de réaliser deux logos identiques dans une seule plaque, en la coupant dans sa diagonale.

Exercice 4

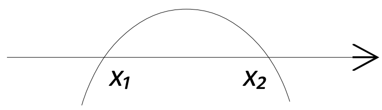
1. La vente de 3 kilomètres de tissu rapporte 680×3 = 2040 €.
Le coût de production s'élève à $C(3) = 15\times3^3 - 120\times3^2 + 500\times3 + 750 = 1575$ €.

Le bénéfice de la vente de 3 km de tissu est 2040 – 1575 = **465 €**.

2. On a $B(x) = 680x - C(x)$
$= 680x - (15x^3 - 120x^2 + 500x + 750)$
$= 680x - 15x^3 + 120x^2 - 500x - 750$
D'où $\boldsymbol{B(x) = -15x^3 + 120x^2 + 180x - 750}$.

3. $B'(x) = -45x^2 + 240x + 180$
ou encore : $\boldsymbol{B'(x) = -15(3x^2 - 16x - 12)}$ pour $x \in [0 ; 10]$

4. Cherchons les racines éventuelles de $3x^2 - 16x - 12$ sur [0 ; 10]
Le discriminant vaut $\Delta = (-16)^2 - 4\times3\times(-12) = 400$
B' a deux racines qui sont :
$x_1 = \dfrac{16-20}{6} = -\dfrac{4}{3}$ (hors domaine de définition) et $x_2 = \dfrac{16+20}{6} = 6$



On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		6		$+\infty$
$B'(x)$		+	0	–	
$B(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

5. Pour obtenir un résultat maximal, l'entreprise doit-elle produire **6 kilomètres de tissu**.
Elle réalise alors un bénéfice de $\boldsymbol{B(6) = 1410}$ **€**.