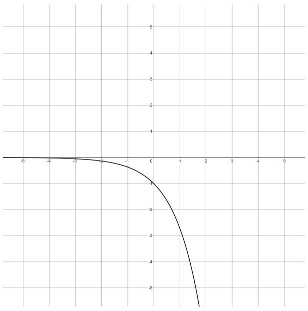
Énoncés

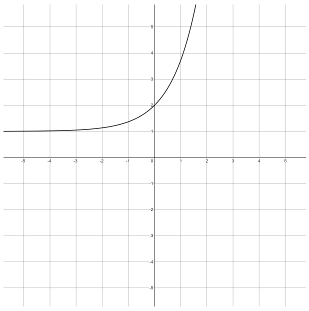
Exercice 1

Reconnaître chaque fonction à partir de sa courbe représentative.

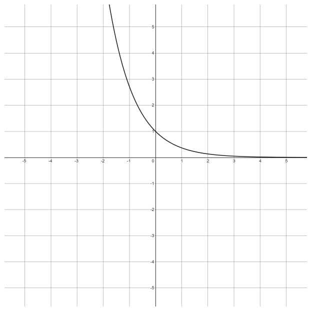
a]



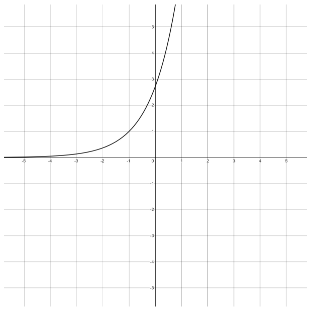
b]



c]



d]



Exercice 2

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes définies et dérivables sur $\mathbb{R}$:

a] $f(x) = \exp(x) - x + \exp(2)$

b] $f(x) = \exp(5x + 1)$

c] $f(x) = \sqrt{10} - 5\exp(2x)$

d] $f(x) = (2x + 1)\exp(x)$

e] $f(x) = \dfrac{\exp(x)+3}{5x-1}$

f] $f(x) = (4 - x^2)\exp(-6x)$

Exercice 3

1. Résoudre les équations suivantes :

a] $\exp(-5x) = 1$

b] $\exp(2x) = 0$

c] $\exp(x - 4) = \exp(-1)$

d] $\exp(3x) - \exp(5x + 4) = 0$

2. Résoudre les inéquations suivantes :

a] $\exp(-x) \geqslant 0$

b] $\exp(3x) > \exp(2)$

c] $\exp(5x - 2) \leqslant 1$

d] $\exp(-2x) + \exp(1) < 0$

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \exp(-2x) + 1$ de courbe représentative (C).

1. Déterminer l'équation de la droite (T) tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

2. À l'aide de la calculatrice, conjecturer la position de (T) par rapport à la courbe (C).

3. Soit $g(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x + \exp(-2x) - 1$.

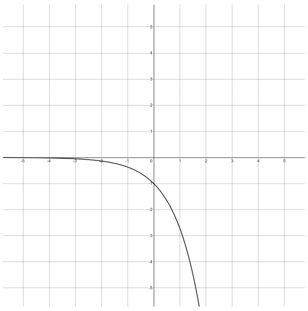
a] Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$ et préciser ses extremums éventuels.

b] Démontrer la conjecture de la question **2.**

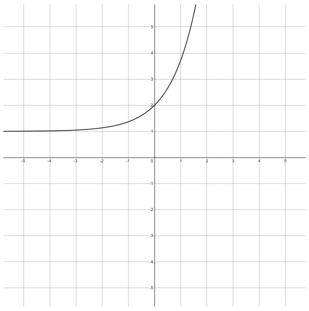
Corrigés

Exercice 1

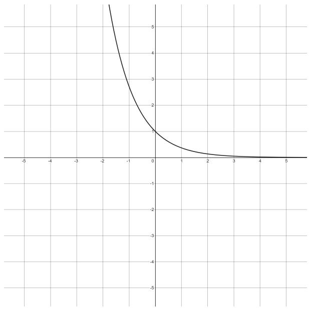
a] $x \mapsto -\exp(x)$



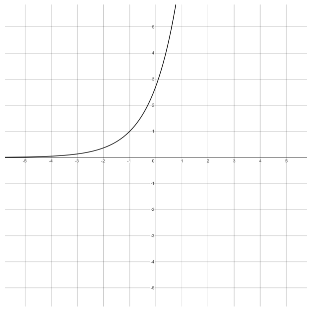
b] $x \mapsto \exp(x) + 1$



c] $x \mapsto \exp(-x)$



d] $x \mapsto \exp(x + 1)$



Exercice 2

a] $f(x) = \exp(x) - x + \exp(2)$
$\boldsymbol{f'(x) = \exp(x) - 1}$

b] $f(x) = \exp(5x + 1)$
$\boldsymbol{f'(x) = 5\exp(5x + 1)}$

c] $f(x) = \sqrt{10} - 5\exp(2x)$
$\boldsymbol{f'(x) = -10\exp(2x)}$

d] $f(x) = (2x + 1)\exp(x)$
$\boldsymbol{f'(x) = (2x + 3)\exp(x)}$

e] $f(x) = \dfrac{\exp(x)+3}{5x-1}$
$\boldsymbol{f'(x) = \dfrac{(5x-6)\exp(x)-15}{(5x-1)^2}}$

f] $f(x) = (4 - x^2)\exp(-6x)$
$\boldsymbol{f'(x) = 2(3x^2 - x - 12)\exp(-6x)}$

Exercice 3

1.

a] $\exp(-5x) = 1$
S = {0}

b] $\exp(2x) = 0$
S = $\varnothing$

c] $\exp(x - 4) = \exp(-1)$
S = {3}

d] $\exp(3x) - \exp(5x + 4) = 0$
S = {-2}

2.

a] $\exp(-x) \geqslant 0$
S = $\mathbb{R}$

b] $\exp(3x) > \exp(2)$
S = $\left]\dfrac{2}{3}\,;+\infty\right[$

c] $\exp(5x - 2) \leqslant 1$
S = $\left]-\infty\,;\dfrac{2}{5}\right]$

d] $\exp(-2x) + \exp(1) < 0$
S = $\varnothing$

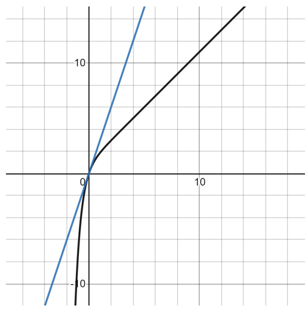
Exercice 4

1. $f(x) = x - \exp(-2x) + 1$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a $f'(x) = 1 + 2\exp(-2x)$.

On a $f(0) = 0$ et $f'(0) = 3$
L'équation de la droite (T) tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 est :

(T) : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$
$\boldsymbol{y = 3x}$

2. Il semble que la droite (T) soit toujours au-dessus de (C).



3. **a]** $g(x) = 2x + \exp(-2x) - 1$
La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a $g'(x) = 2 - 2\exp(-2x)$.

Cherchons les valeurs de x pour lesquelles :
$g'(x) > 0$
$2 - 2\exp(-2x) > 0$
$1 > \exp(-2x)$
$\exp(0) > \exp(-2x)$ or exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
$0 > -2x$
$x > 0$
Par conséquent, g' est positive sur $[0 ; +\infty[$ et négative sur $]-\infty ; 0]$.

D'où le tableau :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	0	↗	

La fonction g atteint un minimum en 0 qui vaut 0.

b] La droite (T) est au-dessus de (C) pour tout réel x tel que :
$3x \geqslant f(x)$
$3x \geqslant x - \exp(-2x) + 1$
$2x + \exp(-2x) - 1 \geqslant 0$
$g(x) \geqslant 0$
Comme la fonction g est positive sur $\mathbb{R}$ alors **la droite (T) est toujours au-dessus de (C)**.