Énoncés

Exercice 1

Écrire les expressions suivantes en utilisant la notation e^x puis les simplifier au maximum.

$A = 3(\exp(x))^2 \exp(-2x + 5)$

$B = \dfrac{2\exp(x^2+2)}{\exp(x(x-1))}$

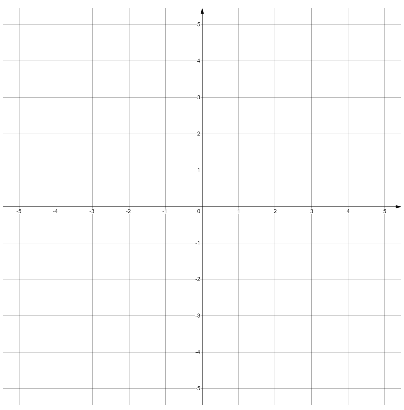
$C = (2\exp(x) + 1)(\exp(-x) - 2)^2$

$D = \dfrac{1-\exp(2x)}{1-\exp(x)}$

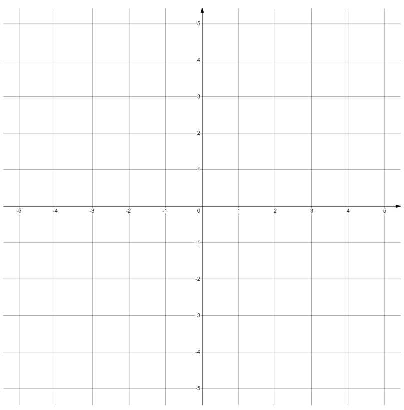
Exercice 2

Sans calculatrice, tracer l'allure de la courbe représentative des fonctions suivantes.

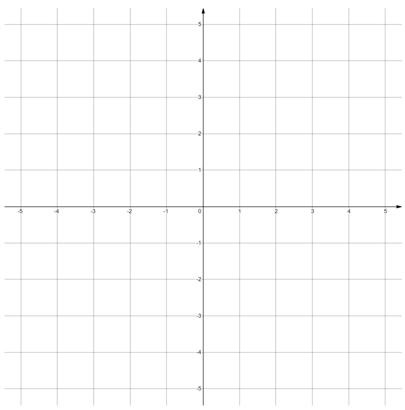
a] $x \mapsto 1 + e^x$



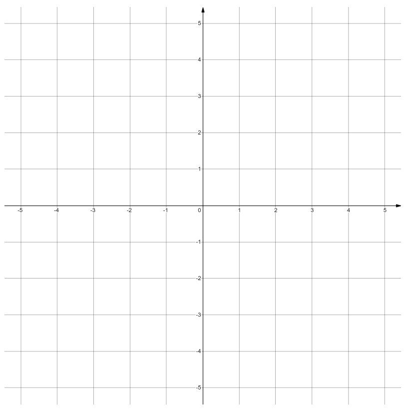
b] $x \mapsto e^{-x}$



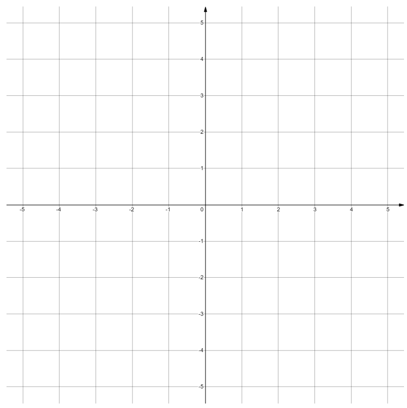
c] $x \mapsto -e^x$



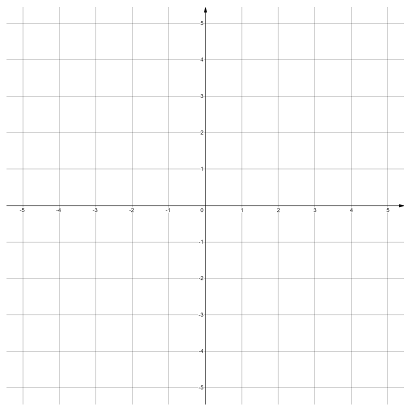
d] $x \mapsto e^{x+1}$



e] $x \mapsto -e^{-x}$



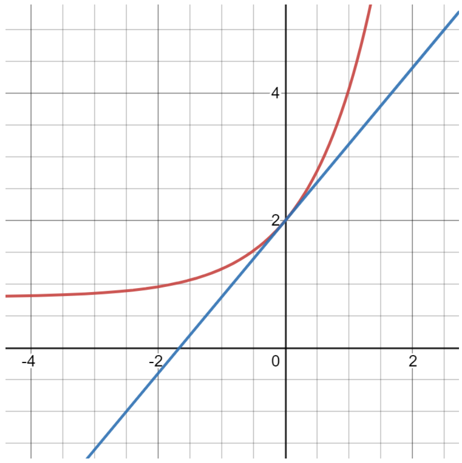
f] $x \mapsto e^{1-x}$



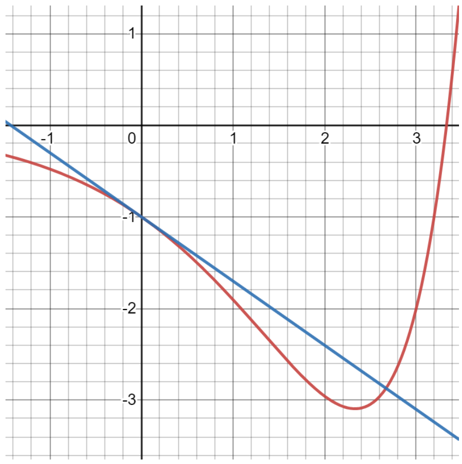
Exercice 3

Chacune des fonctions suivantes est représentée par une courbe rouge.
Une ou plusieurs tangentes à la courbe sont représentées en bleu.
Déterminer l'expression exacte de chacune des fonctions à partir de lectures graphiques bien choisies.

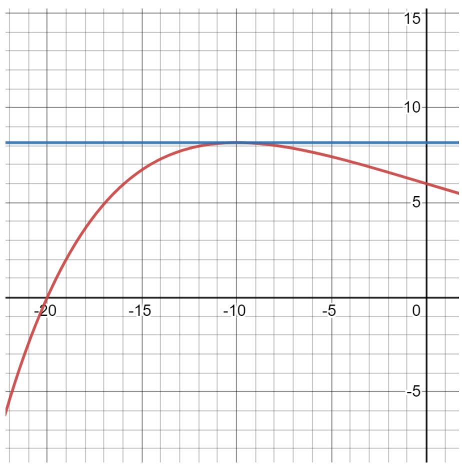
a] $f(x) = a\mathrm{e}^x + b$
avec a et b appartenant à $\mathbb{R}$.



b] $g(x) = (ax + b)\mathrm{e}^x$
avec a et b appartenant à $\mathbb{R}$.



c] $h(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{cx}$
avec a, b et c appartenant à $\mathbb{R}$.



Corrigés

Exercice 1

$A = 3(e^x)^2\, e^{-2x+5}$

$A = 3e^{2x}\, e^{-2x+5}$

$\boldsymbol{A = 3e^5}$

$C = (2e^x + 1)(e^{-x} - 2)^2$

$C = (2e^x + 1)(e^{-2x} - 4e^{-x} + 4)$

$C = 2e^{-x} - 8 + 8e^x + e^{-2x} - 4e^{-x} + 4$

$\boldsymbol{C = 8e^x + e^{-2x} - 2e^{-x} - 4}$

$B = \dfrac{2\,e^{x^2+2}}{e^{x(x-1)}}$

$B = 2e^{2x}\, e^{-x(x-1)}$

$\boldsymbol{B = 2e^{-x^2+4x}}$

$D = \dfrac{1-e^{2x}}{1-e^x}$

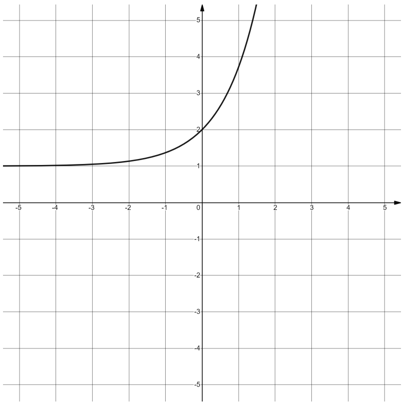
$D = \dfrac{1-\left(e^x\right)^2}{1-e^x}$

$D = \dfrac{\left(1-e^x\right)\left(1+e^x\right)}{1-e^x}$

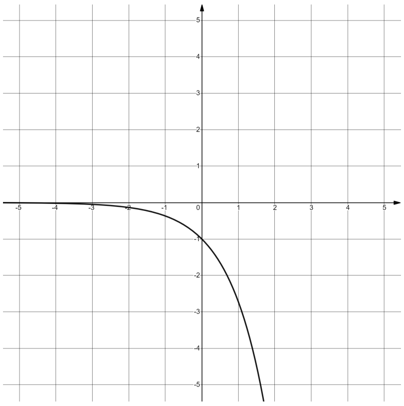
$\boldsymbol{D = 1 + e^x}$

Exercice 2

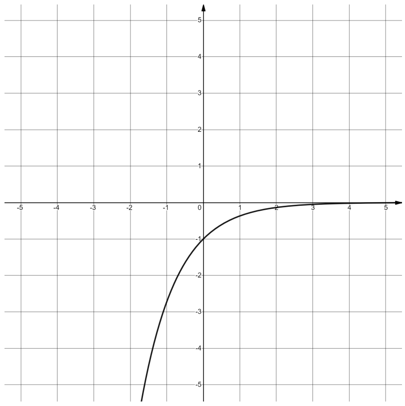
a] $x \mapsto 1 + e^x$



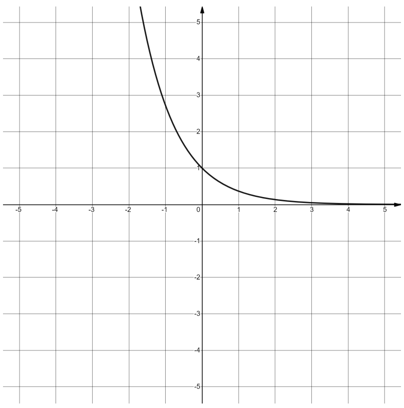
c] $x \mapsto -e^x$



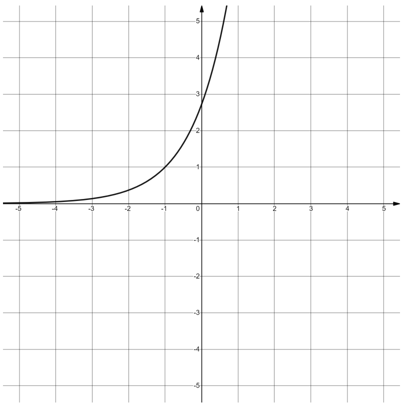
e] $x \mapsto -e^{-x}$



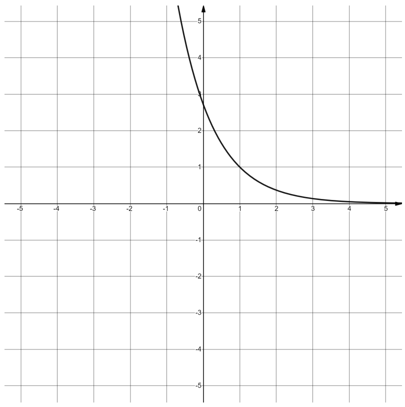
b] $x \mapsto e^{-x}$



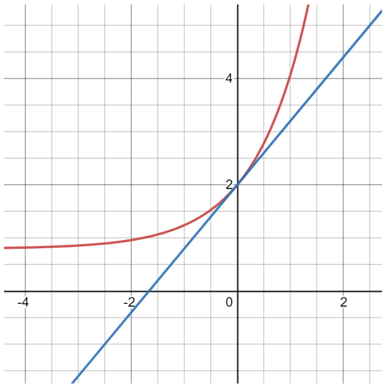
d] $x \mapsto e^{x+1}$



f] $x \mapsto e^{1-x}$



Exercice 3



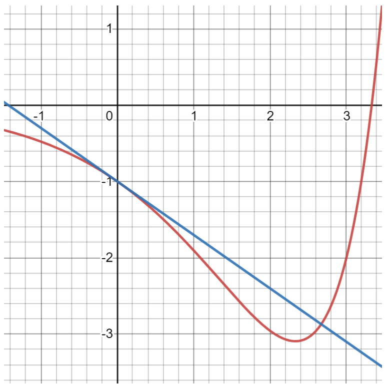
a] $f(x) = ae^x + b$

La fonction dérivée de f est $f'(x) = ae^x$.

On lit $\begin{cases} f(0)=2 \\ f'(0)=\dfrac{6}{5} \end{cases}$ or $\begin{cases} f(0)=a+b \\ f'(0)=a \end{cases}$

donc $\begin{cases} a+b=2 \\ a=\dfrac{6}{5} \end{cases}$ et par conséquent $\begin{cases} b=\dfrac{4}{5} \\ a=\dfrac{6}{5} \end{cases}$

La fonction cherchée est f telle que pour tout réel x on a $\boldsymbol{f(x) = \frac{6}{5}e^x + \frac{4}{5}}$.



b] $g(x) = (ax + b)e^x$

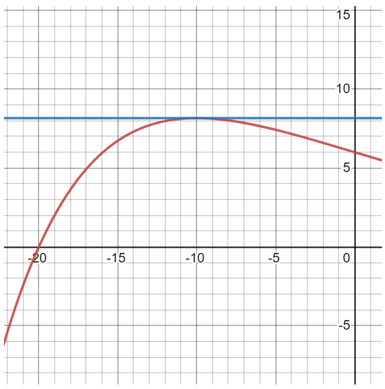
La fonction dérivée de g est : $g'(x) = ae^x + (ax + b)e^x$

$= (ax + a + b)e^x$

On lit $\begin{cases} g(0)=-1 \\ g'(0)=-\dfrac{7}{10} \end{cases}$ or $\begin{cases} g(0)=b \\ g'(0)=a+b \end{cases}$

donc $\begin{cases} b=-1 \\ a+b=-\dfrac{7}{10} \end{cases}$ et par conséquent $\begin{cases} b=-1 \\ a=\dfrac{3}{10} \end{cases}$

La fonction cherchée est g telle que pour tout réel x on a $\boldsymbol{g(x) = (0{,}3x - 1)e^x}$.



c] $h(x) = (ax + b)e^{cx}$

La fonction dérivée de h est : $h'(x) = ae^x + c(ax + b)e^{cx}$

$= (acx + a + bc)e^{cx}$

On lit $\begin{cases} h(0)=6 \\ h(-20)=0 \\ h'(-10)=0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} b=6 \\ (-20a+b)e^{-20c}=0 \\ (-10ac+a+bc)e^{-10c}=0 \end{cases}$

Comme la fonction exponentielle ne s'annule jamais alors on a :

$\begin{cases} b=6 \\ -20a+b=0 \\ -10ac+a+bc=0 \end{cases}$ et par conséquent $\begin{cases} b=6 \\ a=0{,}3 \\ c=-0{,}1 \end{cases}$

La fonction cherchée est h telle que pour tout réel x on a $\boldsymbol{h(x) = (0{,}3x + 6)e^{-0{,}1x}}$.