Énoncés

Exercice 1

Le *chuck-a-luck* est un jeu de dés qui se décline dans de nombreux pays.
L'une de ses variantes est la suivante :

- Le joueur mise 10 € et lance 3 dés à 6 faces.
- S'il obtient trois 6 alors il reçoit 100 €.
- S'il obtient exactement deux 6 alors il reçoit 20 €.
- S'il obtient un seul 6 alors il reçoit 10 €.

1. Pour chaque dé lancé, on nomme S l'événement « Obtenir 6 ».

a] Construire un arbre de probabilité modélisant le *chuck-a-luck*.
b] Quelle est la probabilité d'obtenir trois 6 ?
c] Montrer que la probabilité d'obtenir un seul 6 vaut $\frac{25}{72}$.

2. On nomme G la variable aléatoire du gain algébrique d'un joueur de *chuck-a-luck*.

a] Construire la loi de probabilité de G.
b] Calculer l'espérance de G. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.
c] Calculer l'écart-type de G.

Exercice 2

1. Une expérience aléatoire consiste à lancer un dé à 6 faces.
On nomme X le résultat du lancer.

a] Calculer l'étendue des valeurs prises par X.
b] Calculer l'espérance de X.
c] Calculer l'écart-type de X.

2. Une expérience aléatoire consiste à lancer deux dés à 4 faces.
On nomme Y la somme des résultats des deux dés.

a] Calculer l'étendue des valeurs prises par Y.
b] Calculer l'espérance de Y.
c] Calculer l'écart-type de Y.

3. L'étendue et l'écart-type sont deux indicateurs de dispersion.
Quel problème posent les résultats des questions **1.** et **2.** ?

Exercice 3

On souhaite étudier l'espérance et l'écart-type de la variable X_n associée au résultat d'un lancer de dé à n faces.

On crée les suites (u_n) et (v_n) telles que, pour tout entier n supérieur ou égal à 4 on a : $\begin{cases} u_n = \mathrm{E}(X_n) \\ v_n = \sigma(X_n) \end{cases}$

où E et σ désignent respectivement l'espérance et l'écart-type de X_n.

1. Montrer que $u_4 = 2{,}5$ et $v_4 \approx 1{,}12$.

2. Rectifier les 5 erreurs qui se sont glissées entre la ligne 3 et la ligne 28 du programme Python ci-dessous.
Version en ligne : https://trinket.io/python3/e2d5005197

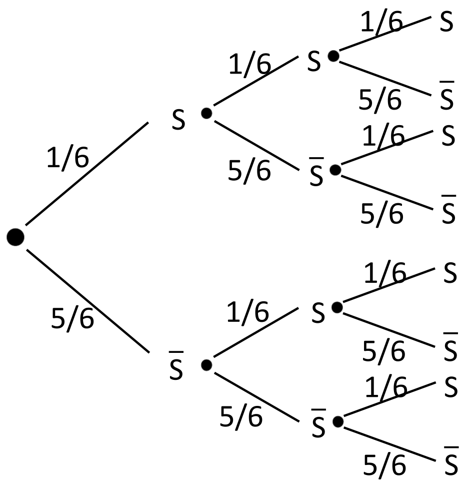
```
from math import sqrt
from matplotlib.pyplot import *

def LOI(n):
  VAL = []
  PROB = []
  for i in range(n):
    VAL.append(i+1)
    PROB.append(n)
  return VAL,PROB

def esperance(n):
  X = LOI(n)[1]
  P = LOI(n)[1]
  e = 0
  for i in range(n):
    e = P[i]*X[i]
  return e

def ecart_type(n):
  X = LOI(n)[0]
  P = LOI(n)[1]
  s = 0
  for i in range(n):
    s = s + P[i]*X[i]**2
  v = s - esperance(n)
  return v

N,U,V = [],[],[]

for i in range (4,8):
  N.append(i)
  U.append(round(esperance(i),1))
  V.append(round(ecart_type(i),2))

print("Espérances :",U)
print("Écart-types :",V)

scatter(N,U)
scatter(N,V,marker='x')
show()
```

3. Effectuer une conjecture concernant le sens de variation et, éventuellement, la nature des suites (u_n) et (v_n).

Corrigés

Exercice 1

1. a]



b] La probabilité d'obtenir trois 6 vaut :

$P(SSS) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\mathbf{\frac{1}{216}}$.

c] La probabilité d'obtenir un seul 6 vaut :

$$P(S\bar{S}\bar{S}) + P(\bar{S}S\bar{S}) + P(\bar{S}\bar{S}S) = \frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}$$

$$= 3\times\frac{25}{216}$$

$$= \mathbf{\frac{25}{72}}$$

2.

a]

x_i	-10	0	10	90
$P(G = x_i)$	125/216	25/72	5/72	1/216

b] L'espérance de G vaut :

$$E(G) = (-10)\times\frac{125}{216}+0\times\frac{25}{72}+10\times\frac{5}{72}+90\times\frac{1}{216}$$

$$= -\mathbf{\frac{505}{108}}\approx -4{,}68$$

Après un grand nombre de parties, **un joueur aura perdu en moyenne environ 4,68 € par partie**.

c] La variance de G vaut :

$$V(G) = (-10)^2\times\frac{125}{216}+0^2\times\frac{25}{72}+10^2\times\frac{5}{72}+90^2\times\frac{1}{216}-\left(-\frac{505}{108}\right)^2$$

$$V(G) = \frac{938375}{11664}$$

L'écart-type de G vaut donc $\sqrt{\mathbf{\frac{938375}{11664}}}\approx\mathbf{8{,}97}$.

Exercice 2

1. a] Les valeurs prises par X sont comprises entre 1 et 6, soit une étendue valant **5**.

b] La loi de probabilité de X est :

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

L'espérance de X vaut :

$E(X) = 1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+...+6\times\frac{1}{6}$

$= \mathbf{3{,}5}$

c] La variance de X vaut :

$V(X) = 1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{6}+...+6^2\times\frac{1}{6}-3{,}5^2$

$= \frac{35}{12}$

L'écart-type de X vaut donc $\sigma(X) = \boldsymbol{\sqrt{\frac{35}{12}}\approx 1{,}71}$

2. a] Les valeurs prises par Y sont comprises entre 2 et 8, soit une étendue valant **6**.

b] La loi de probabilité de Y est :

y_i	2	3	4	5	6	7	8
$P(Y = y_i)$	1/16	2/16	3/16	4/16	3/16	2/16	1/16

L'espérance de Y vaut :

$E(Y) = 2\times\frac{1}{16}+3\times\frac{2}{16}+...+8\times\frac{1}{16}$

$= \frac{80}{16}$

$= \mathbf{5}$

d] La variance de Y vaut :

$V(Y) = 2^2\times\frac{1}{16}+3^2\times\frac{2}{16}+...+8^2\times\frac{1}{16}-5^2$

$= 2{,}5$

L'écart-type de Y vaut donc $\sigma(Y) = \boldsymbol{\sqrt{2{,}5}\approx 1{,}58}$

3. La variable aléatoire X a une une plus petite étendue mais un plus grand écart-type que la variable Y.
Par conséquent, il est difficile de désigner la plus « dispersée » de ces deux variables aléatoires.

Exercice 3

1. La loi de probabilité de X_4 est :

x_i	1	2	3	4
$P(X_4 = x_i)$	0,25	0,25	0,25	0,25

L'espérance de X_4 vaut :
$u_4 = 1\times 0{,}25 + \ldots + 4\times 0{,}25 = \mathbf{2{,}5}$

La variance de X_4 vaut :
$V(X_4) = 1^2\times 0{,}25 + + \ldots + 4^2\times 0{,}25 - 2{,}5^2 = 1{,}25$
L'écart-type de X_4 vaut donc $v_4 = \sqrt{\mathbf{1{,}25}} \approx \mathbf{1{,}12}$

2.

```
from math import sqrt
from matplotlib.pyplot import *

def LOI(n):
  VAL = []
  PROB = []
  for i in range(n):
    VAL.append(i+1)
    PROB.append(1/n)
  return VAL,PROB

def esperance(n):
  X = LOI(n)[0]
  P = LOI(n)[1]
  e = 0
  for i in range(n):
    e = e + P[i]*X[i]
  return e

def ecart_type(n):
  X = LOI(n)[0]
  P = LOI(n)[1]
  s = 0
  for i in range(n):
    s = s + P[i]*X[i]**2
  v = s - (esperance(n))**2
  return sqrt(v)

N,U,V = [],[],[]

for i in range (4,8):
  N.append(i)
  U.append(round(esperance(i),1))
  V.append(round(ecart_type(i),2))

print("Espérances :",U)
print("Écart-types :",V)

scatter(N,U)
scatter(N,V,marker='x')
show()
```

3. Les deux suites semblent croissantes, ce qui est cohérent avec la façon dont elles sont définies.
Leur représentation graphique à chacune semble une droite, ce qui permet de conjecturer que ces deux suites sont arithmétiques.