Les Épreuves Communes de Contrôle Continu (E3C) faisaient initialement partie de la réforme du bac de 2019. Elles sont composées d'exercices représentatifs de ce qu'un élève doit avoir retenu de son année de spécialité. Compter 30 minutes par exercice.

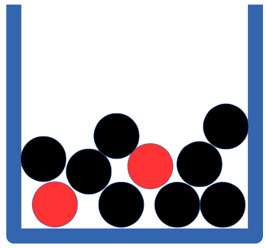
Énoncés

Exercice 1

Les questions de ce questionnaire à choix multiples (QCM) sont indépendantes.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Aucune justification n'est demandée mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon.

<table>
<tr><th>Questions</th><th>Réponse A</th><th>Réponse B</th><th>Réponse C</th><th>Réponse D</th></tr>
<tr><td>1. X est une variable aléatoire d'espérance nulle dont la loi de probabilité est :<table><tr><td>x_i</td><td>a</td><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>$P(X = x_i)$</td><td>1/6</td><td>1/3</td><td>b</td></tr></table>Que vaut a ?</td><td>-19</td><td>-13</td><td>-7</td><td>Une infinité de valeurs sont possibles.</td></tr>
<tr><td>2. La fratrie A est composée de 2 garçons et 5 filles. La fratrie B est composée de 1 garçon et 2 filles.
On choisit une personne au hasard parmi ces gens. On nomme F le nombre de frères de cette personne.
On a $P(F = 1) = \dots$</td><td>0,2</td><td>0,3</td><td>0,4</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>3. On donne la fonction Python ci-dessous.
<code>def calcul(n):</code>
<code> a = 0</code>
<code> for i in range(n):</code>
<code>   a = a + (i + 1)</code>
<code> return a/n</code>
Que renvoie calcul(4) ?</td><td>1</td><td>1,5</td><td>2</td><td>2,5</td></tr>
<tr><td>4. Deux variables aléatoires X et Y vérifient :
$Y = 4X + 2$
L'écart-type $\sigma(Y)$ est égal à ...</td><td>$\sigma(X)$</td><td>$2\sigma(X)$</td><td>$4\sigma(X)$</td><td>$16\sigma(X)$</td></tr>
<tr><td>5. Un dé à 6 faces est truqué de telle sorte que la probabilité d'apparition du 6 est le triple de la probabilité des autres faces.
Après un très grand nombre de parties, le résultat du dé par partie est en moyenne :</td><td>2,625</td><td>3,875</td><td>4,125</td><td>4,25</td></tr>
</table>

Exercice 2



Une urne contient deux boules rouges et huit boules noires, indiscernables au toucher.

Le *jeu A* dont le prix d'entrée est 1 € a les règles suivantes : le joueur tire deux boules de l'urne sans remise puis reçoit 3 € par boule rouge tirée.

1. **a]** Montrer que la probabilité pour que le joueur tire deux boules rouges vaut $\frac{1}{45}$.

b] Montrer que la probabilité pour que le joueur tire deux boules noires vaut $\frac{28}{45}$.

2. On note G la variable aléatoire qui associe à chaque partie le gain algébrique du joueur.
Construire la loi de probabilité de G.

3. **a]** Calculer l'espérance de G.
b] Calculer l'écart-type de G.

4. Comparer le *jeu A* avec un *jeu B* dont l'espérance de gain vaudrait 0,2 et dont l'écart-type serait égal à 1.

Exercice 3

On lance simultanément une pièce et un dé à 6 faces équilibré.

- Si l'on obtient « Face » et un nombre supérieur ou égal à 5 alors on marque 90 points.
- Si l'on obtient « Face » et un nombre inférieur ou égal à 4 alors on marque 18 points.
- Dans tous les autres cas, on perd 40 points.

1. Construire un arbre de probabilité représentant la situation.

2. On nomme X le nombre de points obtenus.
Déterminer la loi de probabilité de X.

3. **a]** Calculer l'espérance de X.
b] Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. Calculer la variance de X.

5. Modifier le nombre de points attribués afin de rendre le jeu équitable sans que la variance de X soit changée.

Exercice 4

Les élèves d'une classe ont formé les groupes représentés ci-dessous.

Chaque rectangle représente un groupe.
Chaque lettre F représente une fille.
Chaque lettre G représente un garçon.

F G G	F F F G	F G G
F F G	F F F	F F G G

1. Une variable aléatoire X admet la loi suivante :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	...	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

a] Montrer que $P(X = 0) = \frac{1}{6}$.

b] Définir X dans le cadre d'une expérience aléatoire (que l'on précisera) en rapport avec la situation.

c] Calculer l'espérance de X.

d] Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

2. La fonction Python ci-contre a été partiellement floutée.

Compléter cette fonction afin que *esperance*([0,1,2],[1/6,1/3,0.5]) renvoie la valeur calculée en **1. c]**.

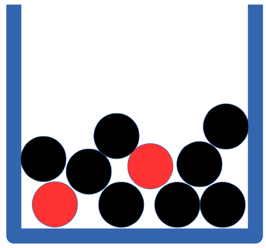
```
def esperance(A,B):
  n = len(A)

  return e
```

Corrigés

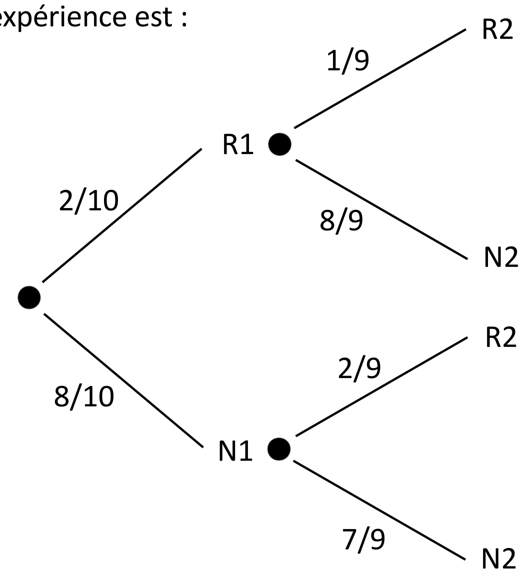
Exercice 1

<table>
<tr><th>Questions</th><th>Réponse A</th><th>Réponse B</th><th>Réponse C</th><th>Réponse D</th></tr>
<tr><td>1. X est une variable aléatoire d'espérance nulle dont la loi de probabilité est :
<table><tr><td>xi</td><td>a</td><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>P(X = xi)</td><td>1/6</td><td>1/3</td><td>b</td></tr></table>
Que vaut a ?</td><td>-19</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2. La fratrie A est composée de 2 garçons et 5 filles. La fratrie B est composée de 1 garçon et 2 filles.
On choisit une personne au hasard parmi ces gens. On nomme F le nombre de frères de cette personne.
On a P(F = 1) = ...</td><td></td><td></td><td>0,4</td><td></td></tr>
<tr><td>3. On donne la fonction Python ci-dessous.
<pre>def calcul(n):
  a = 0
  for i in range(n):
    a = a + (i + 1)
  return a/n</pre>
Que renvoie calcul(2) ?</td><td></td><td>1,5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4. Deux variables aléatoires X et Y vérifient :
$Y = 4X + 2$
L'écart-type σ(Y) est égal à ...</td><td></td><td></td><td>4σ(X)</td><td></td></tr>
<tr><td>5. Un dé à 6 faces est truqué de telle sorte que la probabilité d'apparition du 6 est le triple de la probabilité des autres faces.
Après un très grand nombre de parties, le résultat du dé par partie est en moyenne :</td><td></td><td></td><td>4,125</td><td></td></tr>
</table>

Exercice 2



1. Un arbre de probabilité de l'expérience est :



a] La probabilité pour que le joueur tire deux boules rouges vaut $\frac{2}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{2}{90}$ ce qui est égal à $\frac{1}{45}$.

b] La probabilité pour que le joueur tire deux boules noires vaut $\frac{8}{10} \times \frac{7}{9} = \frac{56}{90}$ ce qui est égal à $\frac{28}{45}$.

2. Le gain algébrique prend les valeurs (-1) €, 2 € et 5€.
Sa loi de probabilité est :

x_i	(-1) €	2 €	5 €
$P(G = x_i)$	$\frac{28}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{1}{45}$

3. a] L'espérance de *G* vaut $(-1) \times \frac{28}{45} + 2 \times \frac{16}{45} + 5 \times \frac{1}{45} = \frac{9}{45}$ soit **0,2**.

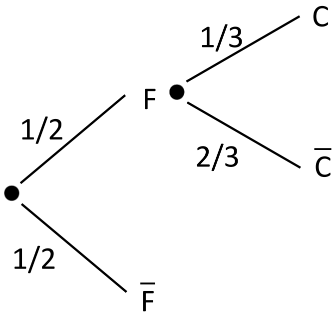
b] La variance de *G* vaut $(-1)^2 \times \frac{28}{45} + 2^2 \times \frac{16}{45} + 5^2 \times \frac{1}{45} - 0{,}2^2 = 2{,}56$

L'écart-type de *G* vaut $\sqrt{2{,}56} = \mathbf{1{,}6}$

4. Après un grand nombre de parties, les jeux *A* et *B* font tous les deux gagner en moyenne 0,2 € par partie.
Les gains du jeu *A* sont plus dispersés que ceux du jeu *B*.

Exercice 3

1. F = « Obtenir Face »
C = « Obtenir un nombre supérieur ou égal à 5 »



2. *X* prend les valeurs (-40) ; 18 ; 90 et sa loi de probabilité est :

x_i	-40	18	90
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

3. **a]** L'espérance de *X* vaut $(-40)\times\frac{1}{2}+18\times\frac{1}{3}+90\times\frac{1}{6}=\mathbf{1}$.

b] Après un grand nombre de parties, un joueur aura une moyenne d'environ 1 point par partie.

4. La variance de *X* vaut $(-40)^2\times\frac{1}{2}+18^2\times\frac{1}{3}+90^2\times\frac{1}{6}-1^2=\mathbf{2257}$.

5. Pour que le jeu soit équitable, l'espérance de *X* doit valoir 0.
On atteint cet objectif en donnant à *X* les valeurs **(-41) ; 17 et 89**.
La dispersion des valeurs est la même dans les deux cas : l'écart-type de *X* est donc inchangé.

Exercice 4

1. a] On a $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1$

Donc $P(X = 0) = 1 - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2}$

D'où $\boldsymbol{P(X = 0) = \dfrac{1}{6}}$

F G G	F F F G	F G G
F F G	F F F	F F G G

b] On considère l'expérience aléatoire consistant à choisir un groupe d'élèves au hasard.
On peut définir X comme le nombre de garçons faisant partie de ce groupe.

c] L'espérance de X vaut $0\times\dfrac{1}{6}+1\times\dfrac{1}{3}+2\times\dfrac{1}{2}=\boldsymbol{\dfrac{4}{3}}$.

d] On tire au sort un groupe en notant le nombre de garçons qu'il contient.
Après avoir répété cette expérience un grand nombre de fois, le nombre de garçons sera en moyenne d'environ 1,3 par tirage au sort.

2. Une écriture possible est :

```
def esperance(A,B):
    n = len(A)
    e = 0
    for i in range(n):
        e = e + A[i]*B[i]
    return e
```